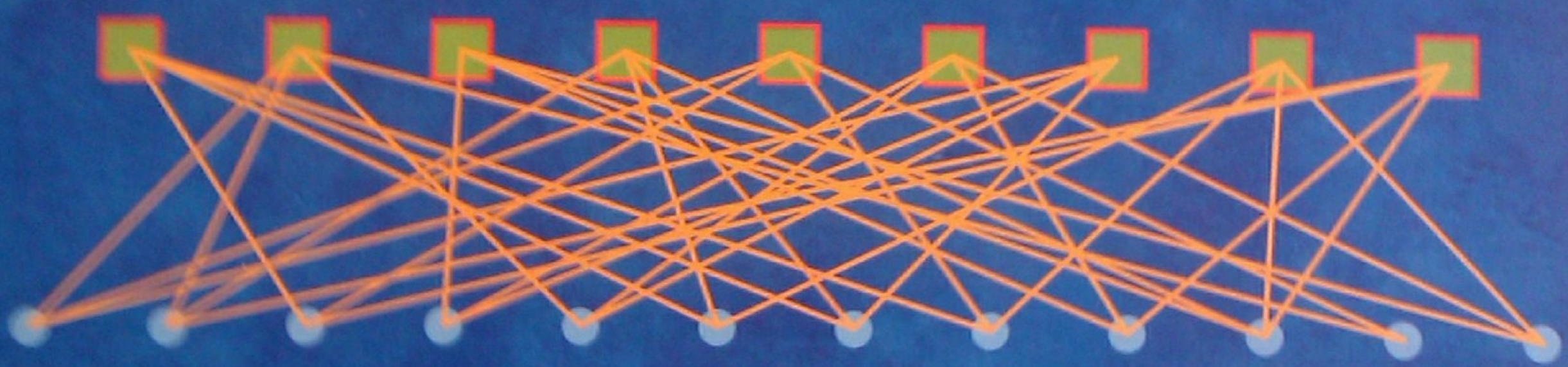
Fundamentals of COMMUNICATION SYSTEMS

İLETİŞİM SİSTEMLERİNİN TEMELLERİ



JOHN G. PROAKIS
MASOUD SALEHI

ÇEVİRENLER
HALİS ALTUN
ERTAN ÖZTÜRK
YUSUF ERKAN YENİCE

nobel
YAYIN DAĞITIM

Çevirenler
Halis Altun - Ertan Öztürk - Yusuf Erkan Yenice

İLETİŞİM SİSTEMLERİNİN TEMELLERİ

Fundamentals of Communication Systems

PEARSON
Merrill
Prentice Hall

nobel
YAYIN DAĞITIM

ANKARA, MART 2010

Nobel Yayın No : 1501
Teknik : 110
ISBN 978-605-395-310-4

© 1. Basımdan Çeviri, Mart 2010

İLETİŞİM SİSTEMLERİNİN TEMELLERİ
Fundamentals of Communication Systems
Çevirenler: Halis Altun - Ertan Öztürk - Yusuf Erkan Yenice
John G. Proakis - Masoud Salehi

© **Copyright 2010, NOBEL YAYIN DAĞITIM TİC. LTD. ŞTİ.**
SERTİFİKA NO 13143
Bu baskının bütün hakları Nobel Yayın Dağıtım Tic. Ltd. Şti.'ne aittir. Yayınevinin yazılı izni olmaksızın, kitabın tümünün veya bir kısmının elektronik, mekanik ya da fotokopi yoluyla basımı, yayımı, çoğaltımı ve dağıtımı yapılamaz.
All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc. TURKISH language edition published by NOBEL YAYIN DAGITIM

Authorized translation from the English language edition, entitled FUNDAMENTALS OF COMMUNICATION SYSTEMS, 1st Edition by PROAKIS, JOHN G.; SALEHI, MASOUD, published by Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall, Copyright © 2005 Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey 07458

Yayın Yönetmeni : Pınar Gülter
Sayfa Tasarım : Mürüvet Durna - Zehra Çidam
Kapak Tasarım : Mehtap Bayraktar Yürümez *-dizgi@nobelyayin.com-*
Baskı ve Cilt : Özyurt Basımevi
+90 312 384 15 36

KÜTÜPHANE BİLGİ KARTI

Altun, Halis., Öztürk, Ertan., Yenice, Yusuf Erkan.
İletişim Sistemlerinin Temelleri Fundamentals of Communication Systems
Yazarlar: John G. Proakis - Masoud Salehi Çevirenler: Halis Altun - Ertan Öztürk - Yusuf Erkan Yenice
1. Baskıdan Çeviri, XXVI + 854 s., 170x240 mm
Kaynakça ve indeks var.
ISBN 978-605-395-310-4
1. İletişim Sistemleri

NOBEL YAYIN DAĞITIM TİC.. LTD. ŞTİ.
İvedik Organize Sanayi Ağaç İşleri Sitesi 521. Sokak Nu.: 22 Ostim-Ankara
Telefon: +90 312 394 52 64 (pbx) Belgeç: +90 312 394 52 68
Web: http://www.nobelyayin.com e-posta: nobel@nobelyayin.com
Kızılay Büro: Mithatpaşa Caddesi Nu: 74 Kocatepe Kültür Merkezi Kızılırmak Sokak Girişi Ankara
Telefon: +90 312 419 20 23 Belgeç: +90 312 418 30 20 e-posta: nobel@nobelyayin.com

NOBEL KİTAP DAĞITIM A.Ş.
İstanbul Merkez: Molla Fenari Sokak Nu.: 8 Cağaloğlu-İstanbul Telefon: +90 212 511 61 44
Belgeç: +90 212 511 61 49 Web: http://www.nobelkitap.com e-posta: istanbul@nobelyayin.com
Ankara Şube: Mithatpaşa Caddesi Nu: 74 Kocatepe Kültür Merkezi Kızılırmak Sokak Girişi Ankara
Telefon: +90 312 418 20 10 (pbx) Belgeç: +90 312 418 30 20 e-posta: ankara@nobelyayin.com

İçerik

ÖNSÖZ xi

1. GİRİŞ 1

1.1 Tarihsel İnceleme 1

1.2 Elektriksel İletişim Sistemlerinin Elemanları 5

1.2.1 Sayısal İletişim Sistemleri, 7

1.2.2 Sayısal İletişimdeki İlk Çalışmalar, 10

1.3 İletişim Kanalları ve Özellikleri, 12

1.4 İletişim Kanalları İçin Matematiksel Modeller 19

1.5 İlave Kaynaklar 22

2 İŞARETLER VE DOĞRUSAL SİSTEMLER 23

2.1 Temel Kavramlar 23

2.1.1 İşaretler üzerindeki Temel İşlemler, 24

2.1.2 İşaretlerin Sınıflandırılması, 25

2.1.3 Bazı Önemli İşaretler ve Özellikleri, 33

2.1.4 *Sistemlerin Sınıflandırılması, 40*
2.1.5 *DZD Sistemlerin Zaman Düzlemi Analizi, 44*
2.2 Fourier Serileri 46
2.2.1 *Fourier Serileri ve Özellikleri, 46*
2.2.2 *DZD Sistemlerin Periyodik İşaretlere Tepkileri, 56*
2.2.3 *Parseval İlişkisi, 59*
2.3 Fourier Dönüşümü 61
2.3.1 *Fourier Serilerinden Fourier Dönüşümüne, 61*
2.3.2 *Fourier Dönüşümünün Temel Özellikleri, 67*
2.3.3 *Periyodik İşaretler için Fourier Dönüşümü, 81*
2.3.4 *DZD Sistemler Üzerinde İletim, 84*
2.4 Süzgeç Tasarımı 88
2.5 Güç ve Enerji 92
2.5.1 *Enerji-Tipli İşaretler, 93*
2.5.2 *Güç-Tipli İşaretler, 96*
2.6 Hilbert Dönüşümü ve Özellikleri 99
2.7 Alçakgeçiren ve Bandgeçiren İşaretler 102
2.8 İlave Kaynaklar 105
Problemler 105

3 GENLİK MODÜLASYONU 124
3.1 Modülasyona Giriş 125
3.2 Genlik Modülasyonu (GM) 126
3.2.1 *Çift Yanbant Taşıyıcı Bastırılmış GM, 126*
3.2.2 *Geleneksel Genlik Modülasyonu, 134*
3.2.3 *Tek Yanbant GM, 139*
3.3 GM Modülatör ve Demodülatörlerin Gerçeklenmesi 144
3.4 İşaret Çoğullama 151
3.4.1 *Frekans Bölmeli Çoğullama, 152*
3.4.2 *Dik Taşıyıcı Çoğullama, 153*
3.5 GM-Radyo Yayıncılığı 154
Ek 3A: TYB-GM İşaretler için İfadenin Matematiksel Türetimi 156
Problemler 158

4 AÇI MODÜLASYONU 169
4.1 FM ve FzM İşaretlerin Gösterimi 170
4.2 Açı-Modüleli İşaretlerin Spektral Karakteristiği 174

4.2.1 Sinüzoidal İşaret ile Açı Modülasyonu, 174
4.2.2 Herhangi Bir Mesaj İşareti ile Açı Modülasyonu, 179

4.3 Açı Modülatör ve Demodülatörlerinin Gerçeklenmesi 180

4.4 FM Radyo ve Televizyon Yayıncılığı 188
4.4.1 FM-Radyo Yayıncılığı, 188
4.4.2 Televizyon Yayıncılığı, 190

4.5 Mobil Kablosuz Telefon Sistemleri 200

4.6 İlave Kaynaklar 202

Problemler 202

5 OLASILIK VE RASTGELE SÜREÇLER 210

5.1 Olasılık ve Rastgele Değişkenlerin İncelenmesi 210
5.1.1 Örnek Uzay, Olay ve Olasılık, 210
5.1.2 Koşullu Olasılık, 211
5.1.3 Rastgele Değişkenler, 214
5.1.4 Rastgele Değişkenin Fonksiyonları, 221
5.1.5 Çoklu Rastgele Değişkenler, 224
5.1.6 Rastgele Değişkenlerin Toplamı, 229

5.2 Rastgele Süreçler: Temel Kavramlar 229
5.2.1 İstatistiksel Ortalamalar, 233
5.2.2 Geniş Anlamda Durağan Süreçler, 235
5.2.3 Çoklu Rastgele Süreçler, 236
5.2.4 Rastgele Süreçler ve Doğrusal Sistemler, 237
5.2.5 Durağan Süreçlerin Güç Spektral Yoğunluğu, 240
5.2.6 Toplam Sürecin Güç Spektral Yoğunluğu, 244

5.3 Gauss ve Beyaz Süreçler 245
5.3.1 Gauss Süreçler, 245
5.3.2 Beyaz Süreçler, 247
5.3.3 Süzgeçlenmiş Gürültü Süreçleri, 249

5.4 İlave Kaynaklar 254

Problemler 255

6 ANALOG İLETİŞİM SİSTEMLERİ ÜZERİNDE GÜRÜLTÜNÜN ETKİSİ 273

6.1 Genlik Modülasyon Sistemlerinde Gürültünün Etkisi 273
6.1.1 Temelband Sistemde Gürültünün Etkisi, 274
6.1.2 ÇYB-TB GM Üzerinde Gürültünün Etkisi, 274
6.1.3 TYB GM Üzerinde Gürültünün Etkisi, 276
6.1.4 Geleneksel GM Üzerinde Gürültünün Etkisi, 278

6.2 Açı Modülasyonu Üzerinde Gürültünün Etkisi 282
6.2.1 Açı Modülasyonunda Eşik Etkisi, 291
6.2.2 Ön Vurgu ve Vurgu Kaldırma, 294
6.3 Analog Modülasyon Sistemlerinin Karşılaştırılması 297
6.4 Faz Kilitlemeli Döngü ile Taşıyıcı Faz Tahmini 299
6.4.1 Toplanır Gürültünün Faz Tahmini Üzerindeki Etkisi, 303
6.5 Analog İletişim Sistemlerinde İletim Kayıpları ve Gürültünün Etkileri 308
6.5.1 Isıl Gürültü Kaynaklarının Karakterize Edilmesi, 309
6.5.2 Etkin Gürültü Sıcaklığı ve Gürültü Şekli, 310
6.5.3 İletim Kayıpları, 313
6.5.4 İşaret İletimi için Tekrarlayıcılar, 315
6.6 İlave Kaynaklar 318
Problemler 318

7 ANALOG-SAYISAL DÖNÜŞÜM 328

7.1 İşaretlerin Örneklenmesi ve Örneklerden Yeniden Oluşturulması 329
7.1.1 Örnekleme Teoremi, 329
7.2 Nicemleme 334
7.2.1 Skalar Nicemleme, 334
7.2.2 Vektör Nicemleme, 342
7.3 Kodlama 344
7.4 Dalgaformu Kodlama 345
7.4.1 Darbe Kodu Modülasyonu (DKM), 346
7.4.2 Farksal Darbe Kodu Modülasyonu (FDKM), 350
7.4.3 Delta Modülasyonu (DM), 352
7.5 Analiz-Sentez Teknikleri 355
7.6 Sayısal Ses İletimi ve Sayısal Ses Kaydı 358
7.6.1 Telefon İletim Sistemlerinde Sayısal Ses, 359
7.6.2 Sayısal Ses Kaydı, 361
7.7 JPEG Resim Kodlama Standardı 365
7.8 İlave Kaynaklar 369
Problemler 369

8 EKLEMELİ BEYAZ GAUSS GÜRÜLTÜLÜ TEMEL BANT KANALDA SAYISAL MODÜLASYON 379

8.1 İşaret Dalga Formlarının Geometrik Gösterimleri 380
8.2 İkili Darbe Modülasyonu 384

8.2.1 İkili Darbe Genlik Modülasyonu, 384
8.2.2 İkili Darbe Konum Modülasyonu, 386

8.3 İkili Modüle Edilmiş İşaretler İçin Eklemeli Beyaz Gauss Gürültüde Optimum Alıcı 389
8.3.1 İlintilendirici Türünde Demodülatör, 391
8.3.2 Uyumlu-Süzgeç-Türünde Demodülatör, 397
8.3.3 İkili İşaretler için Optimum Sezicinin Başarımı, 405

8.4 M-li Darbe Modülasyonu 407
8.4.1 M-li Darbe Genlik Modülasyonu, 409
8.4.2 M-li Dikgen İşaretler, 411
8.4.3 Çift-dikgen İşaretler, 413
8.4.4 Tekyönlü İşaret Dalga Formları, 416
8.4.5 İkili-Kodlu İşaret Dalga Formları, 417
8.4.6 TBGG'de M-li İşaretler İçin Optimum Alıcı, 420

8.5 M-li Darbe Modülasyonu İçin Hata Olasılığı 431
8.5.1 M-li Darbe Genlik Modülasyonu İçin Hata Olasılığı, 431
8.5.2 M-li Dikgen İşaretler İçin Hata Olasılığı, 435
8.5.3 Hata Olasılığında Ortaklık Sınırı, 437
8.5.4 M-li Çift-dikgen İşaretler İçin Hata Olasılığı, 441
8.5.5 M-li Tekyön İşaretler İçin Hata Olasılığı, 442
8.5.6 İkili-Kodlu İşaretlerin Hata Olasılığı, 444
8.5.7 Sayısal Darbe Modülasyon Metotlarının Karşılaştırılması, 444

8.6 Simge Senkronizasyonu 445
8.6.1 Erken-Geç Kapı Senkronlayıcı, 446
8.6.2 Minimum Ortalama Karesel Hata Metodu, 448
8.6.3 Maksimum-Olabilirlik Metodu, 450
8.6.4 Spektral-Hat Metodu, 451

8.7 İlave Kaynaklar 454

Problemler 454

9 BANT SINIRLI TBGG KANALLARDA SAYISAL İLETİM 475

9.1 Bant Sınırlı Kanallarda Sayısal İletim 475
9.1.1 Bant Sınırlı Temel Bant Kanallarda Sayısal DGM İletimi 480

9.2 Bant-Sınırlı Kanallar İçin İşaret Tasarımı 482
9.2.1 Sıfır SAK İçin Bant Sınırlı İşaret Tasarımı-Nyquist Kıstası 484
9.2.2 Bant-Sınırlı İşaretlerin Kontrollü SAK ile Tasarımı-Kısmi Tepki İşaretleri, 490

9.3 Sayısal DGM Sezilmesi İçin Hata Olasılığı 493
9.3.1 Sıfır SAK ile Sayısal DGM Sezilmesi İçin Hata Olasılığı, 493

9.3.2 *Kontrollü SAK İçeren Verinin Simge-Simge Sezilmesi,* 494
9.3.3 *Kısmi Tepkili İşaretlerin Simge-Simge Sezilmesi İçin Hata Olasılığı,* 496
9.3.4 *Kısmi Tepkili İşaretlerin Maksimum Olabilirlik Dizi Sezilmesi,* 501
9.4 Kanal Bozulmasının Var Olması Durumunda Sistem Tasarımı 503
9.4.1 *Bilinen Bir Kanal İçin Verici ve Alıcı Süzgeçlerin Tasarımı,* 505
9.4.2 *Kanal Denkleştirici,* 507
9.5 İlave Kaynaklar 525
Problemler 526

10 TAŞIYICI MODÜLASYONU İLE SAYISAL BİLGİNİN İLETİMİ 541

10.1 Genlik Modülasyonlu Sayısal İşaretler 541
10.1.1 *Genlik Modülasyonlu İşaretlerin Sezimi ve Demodülasyonu,* 545
10.2 Faz Modülasyonlu Sayısal İşaretler 548
10.2.1 *Faz Modülasonlu İşaretlerin Demodülasyonu ve Sezimi,* 553
10.2.2 *Farksal Faz Modülasyonu ve Demodülasyonu,* 558
10.2.3 *Faz Uyumlu FKA Modülasyonu İçin Hata Olasılığı,* 560
10.2.4 *FFKA İçin Hata Olasılığı,* 565
10.3 Dördün Genlik Modülasyonlu Sayısal İşaretler 567
10.3.1 *Dördün Genlik Modülasyonlu İşaretlerin Demodülasyonu ve Sezimi,* 571
10.3.2 *DÖGM İçin Hata Olasılığı,* 574
10.4 Frekans Modülasyonlu Sayısal İşaretler 579
10.4.1 *Frekans Modülasyonlu İşaretlerin Demodülasyonu ve Sezimi,* 581
10.4.2 *FRKA'ın Uyumlu Olmayan Sezimi İçin Hata Olasılığı,* 588
10.4.3 *Sürekli Faz FRKA (SF-FRKA),* 591
10.5 Modülasyon Yöntemlerinin Kıyaslanması 602
10.6 Taşıyıcı Modülasyonlu İşaretler İçin Simge Senkronizasyonu 606
10.7 İlave Kaynaklar 606
Problemler 607

11 SAYISAL İLETİŞİMDE SEÇİLMİŞ KONULAR 623

11.1 Sönümlü Çok Yollu Kanallarda Sayısal İletişim 623
11.1.1 *Zamanla Değişen Çok Yollu Kanallar İçin Kanal Modelleri,* 624
11.1.2 *Frekans Seçici Olmayan Rayleigh Sönümlü Kanallarda İkili Modülasyon Performansı,* 629

11.1.3 İşaret Çeşitlemesi ile Performans İyileştirme, 631
11.1.4 Frekans Seçici Kanallar ve Rake Demodülator, 635

11.2 Çok Taşıyıcılı Modülasyon ve OFDM 639

11.2.1 Bir OFDM Sistemde Modülasyon ve Demodülasyon, 641
11.2.2 FFT Algoritması ile Bir OFDM Sistemin Uyarlanması, 643
11.2.3 OFDM İşaretlerin Spektral Karakteristikleri, 646
11.2.4 OFDM Sistemlerde Tepe-Ortalama Güç Oranı, 647
11.2.5 OFDM Uygulamaları, 649

11.3 Yayılı Spektrum İletişim Sistemleri 652

11.3.1 Yayılı Spektrum Sayısal İletişim Sistemlerinin Modeli, 653
11.3.2 Doğrudan Dizi Yayılı Spektrum Sistemler, 654
11.3.3 DD Yayılı Spektrum İşaretlerin Bazı Uygulamaları, 663
11.3.4 PN Dizilerinin Oluşturulması, 667
11.3.5 Frekans Hoplamalı Yayılı Spektrum, 670

11.4 Sayısal Hücresel İletişim Sistemleri 673

11.4.1 GSM Sistemi, 673
11.4.2 IS-95 Tabanlı CDMA Sistem, 677
11.4.3 Üçüncü Nesil Hücresel İletişim Sistemleri, 681

11.5 Kablolu ve Kablosuz İletişim Kanallarının Performans Analizi 682

11.5.1 Yeniden Üretici Tekrarlayıcılar, 683
11.5.2 Radyo Kanalları İçin Ağ Bütçe Analizi, 684

11.6 İlave Kaynaklar 688

Problemler 689

12 BİLGİ TEORİSİNE GİRİŞ 702

12.1 Bilgi Kaynaklarının Modellenmesi 703

12.1.1 Bilgi Miktarı, 705
12.1.2 Ortak ve Koşullu Entropi, 708
12.1.3 Karşılıklı Bilgi, 711
12.1.4 Farksal Entropi, 711

12.2 Kaynak Kodlama Teoremi 713

12.3 Kaynak Kodlama Algoritmaları 716

12.3.1 Huffman Kaynak Kodlama Algoritması, 716
12.3.2 Lempel–Ziv Kaynak Kodlama Algoritması, 721

12.4 İletişim Kanallarının Modellemesi 724

12.5 Kanal Kapasitesi 725

12.5.1 Gauss Kanalının Kapasitesi, 730

12.6 İletişimdeki Sınırlamalar 733

12.7 İlave Kaynaklar 737
Problemler 737

13 GÜVENİLİR İLETİŞİM İÇİN KODLAMA **751**

13.1 Kodlamanın Vaat Ettikleri 751

13.2 Doğrusal Blok Kodlar 757
13.2.1 Doğrusal Blok Kodlar İçin Kod Kaldırma ve Performans, 762
13.2.2 Baz Önemli Blok Kodlar, 771
13.2.3 Hata Tespitine karşın Hata Düzeltme, 770
13.2.4 Çoğuşma-Hata-Düzeltici Kodlar, 772

13.3 Evrişimsel Kodlar 773
13.3.1 Evrişimsel Kodların Temel Özellikleri, 775
13.3.2 Evrişimsel Kodların Maksimum Olabilirlik Kod Kaldırımı-Viterbi Algoritması, 780
13.3.3 Evrişimsel Kodlar İçin Diğer Kod Kaldırma Algoiritmaları, 785
13.3.4 Evrişimsel Kodların Hata Olasılık Sınırlamaları 786

13.4 Basit Kodların Birleşimine Dayalı İyi Kodlar 789
13.4.1 Çarpım Kodları, 790
13.4.2 Eklemlenmiş Kodlar, 791
13.4.3 Turbo Kodlar, 792
13.4.4 BCJR Algoritması, 794
13.4.5 Turbo Kodların Performansı, 797

13.5 Düşük Yoğunluklu Eşlik Sınama Kodları 799

13.6 Band Sınırlı Kanallar İçin Kodlama 802
13.6.1 Birleştirilmiş Kodlama ve Modülasyon, 802
13.6.2 Trellis-Kodlanmış Modülasyon, 804

13.7 Sönümlü Kanallar İçin Kodlama ve Çeşitleme 811

13.8 Kodlamanın Pratik Uygulamaları 815
13.8.1 Derin-Uzay İletişimi İçin Kodlama, 817
13.8.2 Telefon Hatları İçin Kodlama, 818

13.9 İlave Kaynaklar 819
Problemler 819

KAYNAKÇA **831**

İNDEKS **841**

İlk Söz
Çevirmenlerden

"Bilgi Çağı" olarak adlandırılan ve *"Bilgi Toplumu"* gibi kavramların artık gündelik konuşmalarda yer ettiği Yirmi Birinci yüzyılın ilk çeyreğinde, şüphesiz ki iletişim sistemleri ve bu sistemlerin altyapısı, özellikle bilgi teknolojileri alanındaki gelişmelerin ortaya çıkması, yayılması ve yaşadığımız zaman dilimini şekillendirmesinde ciddi bir ihtiyacı karşılamaktadır. Fakat aynı zamanda toplumun her geçen gün artan *"bilgi bağımlılığının"* bir sonucu olarak, iletişim sektörü daha yüksek performans beklentisini karşılamak için sürekli bir baskı altındadır. Dolayısı ile iletişim sistemlerinde yeni teknolojik gelişmeler için doyurulamaz bir açlık mevcuttur ve bu beklentiler iletişim teknolojilerinde son yıllarda gözlemlenen hızlı gelişmenin temel tetikleyicisidir. *İletişim Sistemlerinin Temelleri,* bu gelişme ve beklentilerin karşılamasında bir katkı sağlayacak şekilde, alanında oldukça saygın araştırmacılar olan John G. Proakis ve Masoud Salehi tarafından kaleme alınmıştır.

Bu saygın çalışmayı Türkçemize kazandırmak için gelen teklif, doğrusu tercüme ekibi olarak bizleri heyecanlandırdı. Maalesef ülkemizde yüksek öğrenime olan yoğun talebe ve bu talebi karşılamak için yeni üniversitelerin açılmasına rağmen kaynak kitaplar konusunda ciddi sıkıntılar yaşandığı bir gerçektir. Bu açıdan oldukça saygın bir çalışma olan *"İletişim Sistemlerinin Temelleri"* adlı kitabı Türkçeye kazandırmak bizim için meşakkatli fakat zevkli bir uğraş oldu.

Kitabı çevirirken *"Teknoloji üretemeyenler, terminoloji de üretemez."* önermesi, tercüme faaliyetimizde izlediğimiz yaklaşımı şekillendirdi. Yukarıda kullandığımız bu ibare bile dilimizde yaşanan ve kültürel ve teknolojik bağımlılıktan kaynaklanan dildeki bozulmanın ironik bir örneğidir. *"Teknoloji"* ve *"terminoloji"* kavramları sırası ile İngilizce *"technology"* ve *"terminology"* kelimelerinin Türkçeleştirilmesi ile elde edilmiştir. Yani konu hakkındaki meramımızı ifade ederken bile bir girdaptan kurtulabilmiş değiliz. Ancak, bu aynı zamanda tercüme faaliyetimizdeki genel ilkeyi de ortaya koymaktadır. Türkçemize yerleşmiş, kabul görmüş terim ve kavramları tercümemiz esnasında kullanmakta bir beis görmemekteyiz.

Bu kitap çevirisinde elden geldiği kadarıyla teknik terim ve kavramların, Türkçemizde kavramsal bütünlüğü olan karşılıklarını vermeye gayret gösterdik. Nasıl Türkçemizde artık televizyon (İngilizce *Television*) kabul görmüş ve oturmuş bir terimse ve bu terim için hiç kimse *"uzakgörme"* gibi farklı bir terim öneremiyorsa (Television *Almancada, fern* ve *sehen* (uzak ve görmek) fiilerinden oluşan *"fernseher"* terimi olarak yer bulmuştur.) biz de her ne kadar Türkçe kökenli olmasa da artık dilimize oturmuş bu tür kelimeler için zorlama yapılmaması gerektiğini düşündük. Bu yüzden tüm gayretimiz, yabancı terim ve terminolojinin etkisini azaltmak olsa da, *"impedance"* yerine *"çeli"* kullanılmasını doğru bulmadığımızdan ve bu terim için empedans ifadesi kabul görmüş olduğundan bu terimi kullandık.

Yine benzer bir şekilde "*modülation*" terimi için "*kipleme*" ifadesini kullanmak yerine "*modülasyon*" ve "*demodulation*" terimi için de "*demodülasyon*" tabirlerini kullandık.

Artık gündelik konuşmamızda yerleşmiş CD gibi kısaltmaların ise olduğu gibi kullanılmasını öngördük. Bu gerekliliğin, MP3, MPEG, JPEG gibi kısaltmaların olduğu gibi kullanılması zorunluluğuna benzediğini düşünmekteyiz. Yine de bu gibi terimlerin Türkçe karşılıklarının oturtulmasına bir zemin hazırlamak için bu terimlerin Türkçe karşılıkları da kullanılmıştır. Yani metin içerisinde SNR (İGO) veya tersi İGO (SNR) ifadelerine rastlanabilir. Bu hedefe hizmet amacı ile ayrıca Türkçe-İngilizce ve İngilizce-Türkçe terimler/kısaltmalar indekslerinin hazırlanması da öngörülmüştür.

Son olarak kitap tercümesi esnasında gözlemlediğimiz ciddi bir eksikliğin üzerine parmak basmak istiyoruz: Kapsamlı ve üzerinde geniş kabul görmüş bir İngilizce-Türkçe teknik terimler sözlüğü oluşturulmalıdır. Türkçenin yabancı terimlerin istilasına karşın, maalesef birkaç gayretli akademisyen dışında, akademik camiada ciddi bir duyarlılık mevcut değil. Bizler de tercüme faaliyetimiz esnasında bu eksikliği fazlası ile hissettik. Dolayısı ile isimlerini burada zikretmesek bile, teknoloji ile birlikte dilimizde yaşanan yabancı terim istilasına karşı ciddi uğraşlar vermekte olan çok kıymetli akademisyenlerimize de şükranlarımızı ifade etmeyi bir borç biliriz. Eğer bu çalışmamız bir başarıya ulaşmış ise bu değerli akademisyenlerimizin, hiç farkında olmasalar dahi, ciddi katkıları olduğunu ifade etmek isteriz.

Halis ALTUN (*Editör*)
Yusuf Erkan YENİCE
Ertan ÖZTÜRK

TÜRKÇE KISALTMALAR VE İNGİLİZCE KARŞILIKLARI

KISALTMA	AÇIK HALİ
ABK	Ayrık Belleksiz (Hafızasız) Kaynak *(Bkz. DMS)*
AÇM	Ayrık-Çoktonlu Modülasyon (*Bkz.* DMT)
ADUDÖK	Artık Darbe Uyarımlı Doğrusal Öngörü Kodlayıcı (*Bkz.* RPE PC)
AGS	Alçak Geçiren Süzgeç (*Bkz.* LPF)
AİSE	Avrupa İletişim Standart Enstitüsü (*Bkz.* ETSI)
AKD	Ayrık Kosinüs Dönüşümü (*Bkz.* DCT)
AOSAH	Simetrik Olmayan Sayısal Abone Hattı (*Bkz.* ADSL)
ATYB	Alt Tek Yanband (*Bkz.* LSSB)
AYB	Artık Yanband (*Bkz.* VSB)
AYF	Aşırı Yüksek Frekans (*Bkz.* UHF)
BDF	Birikimli Dağılım Fonksiyonu (*Bkz.* CDF)
ÇYB GM	Çift Yan Band Genlik Modülasyonu (*Bkz.* DSB GM)
ÇYB-TB GM	Çift Yanband Taşıyıcısı Bastırılmış (*Bkz.* DSB-SC GM)
DD	Doğrudan Dizi (*Bkz.* DS)
DFBÇ	Dik Frekans Bölüşümlü Çoğullama *(Bkz. OFDM)*
DGM	Darbe Genlik Modülasyonu (*Bkz.* PAM)
DKM	Darbe Konum Modülasyonu (*Bkz.* PPM)
DKM	Darbe Kod Modülasyonu (*Bkz.* PCM)
DM	Delta Modülasyonu (*Bkz.* DM)
DÖGM	Dördün Genlik Modülasyonu (*Bkz.* QAM)
DÖK	Doğrusal Öngörü Kodlama (*Bkz.* LPC)
DYES	Düşük Yoğunluklu Eşlik Sınaması (*Bkz.* LDPC)

KISALTMA	AÇIK HALİ
DZD	Doğrusal Zamanla Değişmeyen (*Bkz.* LTI)
TBGG	Toplanır Beyaz Gaussian Gürültü (*Bkz.* AWGN)
EOK	En az Ortalama Kareler (*Bkz.* LMS)
EYIG	Etkin Yönden Bağımsız Işınım Gücü (*Bkz.* EIRP)
FBÇ	Frekans Bölmeli Çoğullama (*Bkz.* FDM)
FBÇE	Frekans Bölüşümlü Çoklu Erişim (FDMA)
FDKM	Farksal Darbe Kod Modülasyonu (*Bkz.* DPCM)
FFKA	Farksal Faz Kaydırmalı Anahtarlama (*Bkz.* DPSK)
FH	Frekans Hoplamalı (*Bkz.* FH)
FİK	Federal İletişim Komisyonu (*Bkz.* FCC)
FKA	Faz Kaydırmalı Anahtarlama (*Bkz.* PSK)
FRKA	Frekans Kaydırmalı Anahtarlama (*Bkz.* FSK)
FKD	Faz Kilitlemeli Döngü (*Bkz.* PLL)
FM	Frekans Modülasyonu (*Bkz.* FM)
FzM	Faz Modülasyonu (*Bkz.* PM)
FRKA	Frekans Kaydırmalı Anahtarlama (*Bkz.* FSK)
GAD	Geniş-Anlamda Durağan (*Bkz.* WSS)
GBFM	Geri Beslemeli FM Demodülatörler (*Bkz.* FMFB)
GH	Görüş Hattı (*Bkz.* LOS)
GKO	Gerilim Kontrollü Osilatör (*Bkz.* VCO)

İGO	İşaret-Gürültü Oranını (*Bkz.* SNR)
İNGO	İşaret- Nicemleme Gürültü Oranı (*Bkz.* SQNR)
İSK	İkili Simetrik Kaynak (*Bkz.* BSS)
KGD	Karar-Geribesleme Denkleştiri (*Bkz.* DFE)
KGFKD	Karar Geri Besleme Faz Kilitlemeli Döngü (*Bkz.* DFPLL)
KKM	Kafes-Kodlanmış Modülasyon (*Bkz.* TCM)
KYA	Kablosuz Yerel Alan Ağları (*Bkz.* LAN)
MAO	Maksimum Ardıl Olasılık (*Bkz.* MAP)
MIGS	Mobil İletim için Global Sistem (*Bkz.* GSM)
MKA	Minimum Kaydırmalı Anahtarlama (*Bkz.* MSK)
MO	Merkez Ofisine (*Bkz.* CO)
MO	Maksimum Olabilirlik (*Bkz.* ML)
MOKH	Minimum Ortalama Karesel Hata (*Bkz.* MMSE)
MTAO	Mobil Telefon Anahtarlama Ofisine (*Bkz.* MTSO)
OKF	Olasılık Kütle Fonksiyonu (*Bkz.* PMF)
OKH	Ortalama Karesel Hata (*Bkz.* MSE)
OYF	Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (*Bkz.* PDF)
OYF	Oldukça Yüksek Frekans (*Bkz.* VHF)
ÖYSEK	Özyinelemeli Sistematik Evrişimsel Kodlar (*Bkz.* RSCC)
RGÜ	Rasgele Gürültü Üreteci (*Bkz.* RNG)
RNG	Random Noise Generator (*Bkz.* RGÜ)
RNG	Random Number Generator (*Bkz.* RSÜ)
RSÜ	Rasgele Sayı Üreteci (*Bkz.* RNG)
SAD	Sayısal Arataşıyıcı Döngüler (*Bkz.* DSL)
SAK	Simgeler Arası Karışım (*Bkz.* ISI)
SAH	Sayısal Abone Hattı (*Bkz.* DSL)
SÇTM	Süzgeçlenmiş Çoktonlu Modülasyon (*Bkz.* FMT)
SDM	Sigma-Delta Modülatör (*Bkz.* SDM)
SDT	Sonlu Süreli Dürtü Tepkisi (*Bkz.* FIR)
SF-FKA	Sürekli Faz-Frekans Kaydırmalı Anahtarlama (*Bkz.* CP-FSK)
SFM	Sürekli Faz Modülasyonu (*Bkz.* CPM)
SSY	Sayısal Ses Yayıncılığı (*Bkz.* DAB)
SVY	Sayısal Video Yayıncılığı (*Bkz.* DVB)
SZDT	Sonsuz Süreli Dürtü Tepkisi (*Bkz.* IIR)
TB-ÇYB	Taşıyıcısı Bastırılmış Çift Yan Bant (*Bkz.* SC-DSB)
TOGO	Tepe-Ortalama Güç Oranı (*Bkz.* PAR)
TYB-GM	Tek Yan Band Genlik Modülasyonu (*Bkz.* SSB-AM)
UİB	Uluslararası İletişim Birliği (*Bkz.* ITU)
UTYB	Üst Tek Yanband (*Bkz.* USSB)
VKO	Voltaj Kontrollü Osilatör (*Bkz.* VCO)
ZBÇ	Zaman Bölmeli Çoğullama (*Bkz.* TDM)

İNGİLİZCE KISALTMALAR VE TÜRKÇE KARŞILIKLARI

KISALTMA	AÇIK HALİ
ADSL	Asymmetric Digital Subscriber Line (*Bkz.* AOSAH)
AM	Amplitude Modulation (*Bkz.* GM)
AWGN	Additive White Gaussian Noise (*Bkz.* TBGG)
BSS	Binary Symmetric Source (*Bkz.* İSK)
CDF	Cumulative Distribution Function (*Bkz.* BDF)
CO	Central Office (*Bkz.* MO)
CPFSK	Continuous Phase Frequency Shify Keying (*Bkz.* SF-FKA)
CPM	Continuous Phase Modulation (*Bkz.* SFM)
DAB	Digital Audio Broadcasting (*Bkz.* SSY)
DCT	Discrete Cosine Transform (*Bkz.* AKD)
DFE	Decision-Feedback Equalizer (*Bkz.* KGD)
DFPLL	Decision Feedback Phase Lock Loop (*Bkz.* KGFKD)
DM	Delta Modulation (*Bkz.* DM)
DMS	Discrete Memoryless Source
DMT	Discrete Multitone Modulation (*Bkz.* AÇM)
DPCM	Differential Pulse Code Modulation (*Bkz.* FDKM)
DPSK	Differential Phase Shift Keying (*Bkz.* FFKA)
DS	Direct Sequence (*Bkz.* DD)
DSB-SC	Double Side Band Suppress Carrier (*Bkz.* TB-ÇYB)
DSL	Digital Subscriber Lines (*Bkz.* SAH)
DSL	Digital Subcarrier Loops (*Bkz.* SAD)

KISALTMA	AÇIK HALİ
DVB	Digital Video Broadcasting (*Bkz.* SVY)
EIRP	Effective Isotropically Radiated Power (*Bkz.* EYIG)
ETSI	European Telecommunication Standard Institute (*Bkz.* AİSE)
FCC	Federal Communication Commission (*Bkz.* FİK)
FDM	Frequency-Division Multiplexing (*Bkz.* FBÇ)
FDMA	Frequency Division Multiple Access (FBÇE)
FH	Frequency Hopped (*Bkz.* FH)
FIR	Finite Impulse Response (*Bkz.* SDT)
FM	Frequency Modulation (*Bkz.* FM)
FMFB	FM With Feedback (*Bkz.* GBFM)
FMT	Filtered Multitone Modulation (*Bkz.* SÇTM)
FSK	Frequency Shift Keying (*Bkz.* FRKA)
GM	Double Sideband (*Bkz.* ÇYB GM)
GSM	Global Systems for Mobile Communication (*Bkz.* MIGS)
IIR	Infinite Impulse Response (*Bkz.* SZDT)
ISI	Inter Symbol Interference (*Bkz.* SAK)
ITU	International Telecommunications Union (*Bkz.*)
LAN	Wireless Local Area Networks (*Bkz.* KYA)
LDPC	Low-Density Parity Check (*Bkz.* DYES)
LMS	Least Mean Square (*Bkz.* EOK)
LOS	Line of Sight (*Bkz.* GH)

LPC	Linear Prediction Coding (*Bkz.* DÖK)
LPF	Lowpass Filter (*Bkz.* AGF)
LSSB	Lower Single Side Band (*Bkz.* ATYB)
LTI	Linear Time Invariant (*Bkz.* DZD)
MAP	Maximum A Posteriori Probability (*Bkz.* MAO)
ML	Maximum Likelihood (*Bkz.* MO)
MMSE	Minimum Mean Square Error (*Bkz.* MOKH)
MSE	Mean Square Error (*Bkz.* OKH)
MSK	Minimum Shift Keying (*Bkz.* MKA)
MTSO	Mobile-Telephone Switching Office (*Bkz.* MTAO)
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing (*Bkz.* DFBÇ)
PAM	Pulse Amplitude Modulation (*Bkz.* DGM)
PAR	Peak-To-Average Power Ratio (*Bkz.* TOGO)
PCM	Pulse Code Modulation (*Bkz.* DKM)
PDF	Probability Density Function (*Bkz.* OYF)
PLL	Phase Locked Loop (*Bkz.* FKD)
PM	Phase Modulation (*Bkz.* FzM)
PMF	Probability Mass Function (*Bkz.* OKF)
PPM	Pulse Position Modulation (*Bkz.* (DKM)

PSK	Phase Shift Keying (*Bkz.* FKA)
QAM	Quadrature Amplitude Modulation (*Bkz.* DÖGM)
RNG	Random Noise Generator (*Bkz.* RGÜ)
RNG	Random Number Generator (*Bkz.* RSÜ)
RPE LPC	Residual Pulse-Excited (*Bkz.* ADUDÖK)
RSCC	Recursive Systematic Convolutional Codes- (*Bkz.* ÖYSEK)
SDM	Sigma-Delta Modulator (*Bkz.* SDM)
SNR	Signal-to-Noise Raito (*Bkz.* İGO)
SQNR	Signal Quantization Noise Ratio (*Bkz.* İNGO)
SQPSK	Staggered Quadrature Phase Shift Keying (*Bkz.* ZDÖFKA)
SSB-AM	Single Side Band (*Bkz.* TYB-GM)
TCM	Trellis-Coded Modulation (*Bkz.* KKM)
TDM	Time Division Multiplexing (*Bkz.* ZBÇ)
TDMA	Time Division Multiple Access (*Bkz.* ZBÇE)
UHF	Ultra High Frequency (*Bkz.* AYF)
USSB	Upper Single Side Band (*Bkz.* UTYB)
VCO	Voltage-Controlled Oscillator (*Bkz.* VKO)
VHF	Very High Frequency (*Bkz.* OYF)
VSB GM	Vestigial Sideband GM (*Bkz.* AYB GM)

İNGİLİZCE KAVRAMLAR VE TÜRKÇE KARŞILIKLARI

Accumulator	Birikeç
All-Zero	Tüm-Sıfır
Anti-Imaging Filter	Gölge Önleyici Süzgeç
Autocorrelation Function	Özilinti Fonksiyonu
Binary	İkili
Burst	Çoğuşma
Catastrophic	Yıkıcı
Central Limit Theorem	Merkezi Limit Teoremi
Channel Capacity	Kanal Kapasitesi
Companding Compressing-Expanding	Sıkıştırma-Genleştirme
Convolution	Evrişim
Correlation	İlinti
Correlation Coefficient	İlinti Katsayısı
Deemphasis	Vurgu Kaldırma
Demultiplexing	Çoğullama Çözme
Differential Entropy	Farksal Entropi
Digital Subcarrier Loops- DSL	Sayısal Arataşıyıcı Döngüler-SAD
Duality	Fourier Dönüşümünün Çifteşlik
Entropy Rate	Entropi Oranı
Envelope	Zarf
Fast Fourier Transform-Fft	Hızlı Fourier Dönüşümü
Fidelity	Aslına Benzerlik
Fixed-To-Variable Length Coding	Sabitten Değişken Uzunluğa Kodlama
Free Space Path Loss	Serbest Uzay Yol Kaybı
Frequency Discriminator	Frekans Ayırtedici
Full Duplex	Tam Çift Yönlü İletişim
Global Systems For Mobile Communication GSM	Mobil İletim için Global Sistem
Granular Noise	Tanecikli Gürültü
Harmonic Frequency	Temel Frekansının Katları
Hue	Renk Tonu
Independence	Bağımsızlık
Independent and Identically Distributed	Bağımsız ve Özdeşçe Dağıtılmış
Innovation Process	Yenilenme Süreci
In-Phase	Aynı Fazda
Interlaced	Görüntü Taraması Binişmeli
Intermodulation Distortion	Aramodülasyon Bozulumu
Interpolation	Aradeğerleme
Linear	Doğrusal
Linear Time-Invariant Systems	Doğrusal Zamanla Değişmeyen Sistem
Low Probability Of	Yakalanabilmesi Düşük

Being Intercepted	Olasılıklı
Lowpass Signal	Alçak Geçiren
Matrix Rank	Matris Ketresi
Message Passing Algorithm	Mesaj İletim Algoritması
Multi-Path Fading	Çoklu-Yol Sönümleme
Multiplexing	Çoğullama
Mutilation	Eşik Etkisi veya Bozulma
Mutual Information	Karşılıklı Bilgi
National Television Systems Committee NTSC	Ulusal Televizyon Sistemleri Komitesi
Octal	Sekizli
Orthogonal	Dikgen
Orthogonal Signal	Dikgen İşaret
Orthogonality	Diklik
Pixel	Resim Elemanı
Preemphasis	Önvurgulama
Quadrature Component	Dik Bileşen
Quantization	Nicemleme, Kuantalama,
Reconstruction	Orijinal İşaretin Elde Edilmesi
Runlength Coding	Tekrar Uzunluğu Kodlama
Sampling	Örnekleme
Saturation	Renk Doygunluğu
Self-Synchronizing Code	Kendi Kendini Eşzamanlayan Kod
Signal Constellation	Yıldız Kümesindeki
Spectrum	Ayrık Tayf
Spread Spectrum	Yayılı Spektrum
Synchronization	Eşzamanlama
Synchronized Demodulator	Uyumlu veya Eşzamanlı Demodülatör
Symbol	Simge, sembol
Tail Probability	Uzantı Olasılığı
Tapped Delay Line Channel Model	Çarpıcılı Gecikme Hattı Kanal Modeli
The Law Of Large Number- LLN	Büyük Sayılar Kanunu
Trellis Diagram	Kafes Diyagramı
Trunk Lines	Ana Hatlar
Uncorrelated	İlintisiz
Uncorrelatedness	İlintisizlik
Uniform	Birörnek
Unvoiced	Ötümsüz
Variance	Değişinti
Voiced	Ötümlü

TÜRKÇE KAVRAMLAR VE İNGİLİZCE KARŞILIKLARI

Alçak Geçiren	Lowpass
Ana Hatlar	Trunk Lines
Aradeğerlemesi	Interpolasyonu
Aramodülasyon Bozulumu	Intermodulation Distortion
Aslına Benzerlik	Fidelity
Aynı Fazda	In-Phase
Ayrık Tayf	Spectrum
Farksal Entropi	Differential Entropy
Bağımsız ve Özdeşçe Dağıtılmış	Independent And Identically Distributed
Bağımsızlık	Independence
Birikeç	Accumulator
Birörnek	Uniform
Büyük Sayılar Kanunu	The Law Of Large Number
Çarpıcılı Gecikme Hattı Kanal Modeli	Tapped Delay Line Channel Model
Çifteşlik (Fourier Dönüşümü)	Duality
Çoğullama	Multiplexing
Çoğullama Çözme	Demultiplexing
Çoğuşma	Burst
Çoklu-Yol Sönümleme	Multi-Path Fading
Değişinti	Variance
Dik Bileşen	Quadrature Component
Dikgen	Orthogonal
Dikgen İşaret	Orthogonal Signal
Diklik	Orthogonality
Doğrusal	Linear
Doğrusal Zamanla Değişmeyen	Linear Time Invariant
Entropi Oranı	Entropy Rate
Eşik Etkisi veya Bozulma	Mutilation
Eşzamanlama	Synchronization
Evrişim	Convolution
Frekans Ayırtedici	Frequency Discriminator
Geniş-Anlamda Durağan	Wide Sense Stationary
Gölge Önleyici Süzgeç	Anti-Imaging Filter
Görüntü Taraması Binişmeli	Interlaced
Hızlı Fourier Dönüşümü	Fast Fourier Transform
İkili	Binary
İlinti	Correlation
İlintisiz	Uncorrelated
İlintisizlik	Uncorrelatedness
İlinti Katsayısı	Correlation Coefficient
Kafes Diyagramını	Trellis Diagram
Kanal Kapasitesi	Channel Capacity
Karşılıklı Bilgi	Mutual Information
Kendi Kendini Eşzamanlayan Kod	Self-Synchronizing Code
Matris Rankı	Rank of Ma!rix
Merkezi Limit Teoremi	Central Limit Theorem
Mesaj İletim Algoritması	Message Passing Algorithm
Mobil İletim için Global Sistem	Global Systems For Mobile Communication
Nicemleme, Kuantalama,	Quantization

Orijinal İşaretin Elde Edilmesi	Reconstruction
Önvurgulama	Preemphasis
Örnekleme	Sampling
Öttümlü	Voiced
Öttümsüz	Unvoiced
Özilinti Fonksiyonu	Autocorrelation Function
Renk Doygunluğu	Saturation
Renk Tonu	Hue
Resim Elemanı	Pixel
Sabitten Değişken Uzunluğa Kodlama	Fixed-To-Variable Length Coding
Sayısal Arataşıyıcı Döngüler	Digital Subcarrier Loop
Sekizli	Octal
Sembol	Symbol
Serbest Uzay Yol Kaybı	Free Space Path Loss
Sıkıştırma-Genleştirme	Companding: Compressing-Expanding
Simge	Symbol
Tam Çift Yönlü İletişim	Full Duplex
Tanecikli Gürültü	Granular Noise
Tekrar Uzunluğu Kodlama	Runlength Coding
Tüm-Sıfır	All-Zero
Ulusal Televizyon Sistemleri Komitesi	National Television Systems Committee
Uyumlu veya Eşzamanlı Demodülatör	Synchronized Demodulator
Uzantı Olasılığı	Tail Probability
Vurgu Kaldırma	Deemphasize
Yakalanabilmesi Düşük Olasılıklı	Low Probability of Being Intercepted
Yayılı Spektrum	Spread Spectrum
Yenilenme Süreci	Innovation Process
Yıkıcı	Catastrophic
Yıldız Kümesi	Signal Constellation
Zarf	Envelope

Ön Söz

Bu kitap Elektrik-Elektronik Mühendisliği için lisans ders kitabı olmayı amaçlamaktadır. Bu kitabın öncelikli amacı modern iletişim sistemlerinde kullanılan temel teknikleri tanıtmak ve bu sistemlerin analiz ve tasarımında kullanılan temel araç ve yöntemleri sunmaktır. Gerçi bu kitap lisans seviyesinde bir ders kitabı olarak yazılmış olmasına rağmen, sahada çalışan mühendisler için veya kendi kendine öğretici bir araç olarak da faydalı olabilir.

Kitabın temel vurgusu Bölüm 7 ile 13 arasında ele alınan sayısal iletişim sistemleri üzerinedir. Bu sistemler, yeni nesil kablosuz iletişim sistemleri, uydu haberleşmesi ve veri iletim ağları gibi günümüz modern iletişim sistemlerimin omurgasını oluşturmaktadır. Geleneksel analog sistemler ise yeterli bir detay ile Bölüm 3, 4 ve 6'da ele alınmıştır. Ayrıca, kitap, ders için gerekli olan, altyapıyı detaylı bir şekilde iki bölüm altında sunmaktadır. Bu bölümlerden biri frekans düzlem yaklaşımı vurgusu ile doğrusal sistem analizi hakkında, diğeri ise olasılık, rastgele değişkenler ve rastgele süreçler hakkındadır. Gerçi bu konular günümüzde elektrik-elektronik mühendisliği müfredatında ayrı kurslar olarak verilse de, öğrencilerin bu konulara haberleşme dersinde sıklıkla göz atmaya ihtiyaç duydukları yazarların tecrübesidir ve bundan dolayı bu konularla ilgili materyal hızlı bir erişim için gereklidir.

Bu dersi alan öğrencilerin matematik, lineer cebir, temel elektronik devreler, doğrusal sistem teorisi ve olasılık ve rastgele süreçler konusunda bir altyapısı olduğu kabul edilmiştir. Son iki konu bu kitabın iki bölümünde ele alınmıştır.

KİTABIN ORGANİZASYONU

Kitap Bölüm 1'de iletişim sistemlerinin kısa bir özeti ile başlamaktadır. Bunu Bölüm 2'de işaretlerin gösterimi ve zaman ve frekans düzleminde sistem analiz yöntemleri takip etmektedir. Vurgu işaretlerin Fourier seri ve Fourier dönüşüm gösterimleri üzerine ve bunların doğrusal sistem analizinde kullanımı üzerine yapılmıştır.

Bölüm 3 ve 4 analog işaretlerin modülasyon ve demodülasyonunu kapsamaktadır. Bölüm 3'de genlik modülasyonu (GM: Amplitute Modulation-AM) ve Bölüm 4'de frekans modülasyonu (FM: Frequency Modulation-FM) ve faz modülasyonu (FzM: Phase Modulation-PM) ele alınmıştır. Radyo ve televizyon yayıncılığı ve analog mobil radyo hücresel iletişim sistemleri de bu bölümlerde ele alınmıştır.

5. Bölümde olasılık ve rastgele süreçlerin temel tanım ve kavramları gözden geçirilmiştir. Özel bir vurgu, toplanır gürültü bozulması için izlenebilir matematiksel modeller sunan, Gauss rastgele süreçlere yapılmıştır. Rastgele işaretlerin hem zaman hem de frekans düzlemi gösterimi sunulmuştur.

Bölüm 6 genlik modülasyonlu (GM) ve frekans modülasyonlu (FM) analog işaretlerin demodülasyonunda toplanır gürültünün ektilerini ve bu analog işaret modülasyon yöntemlerinin işaret-gürültü oran performansı açışından kıyaslamasını ele almaktadır. Bu bölümde ayrıca taşıyıcı fazının faz kilitlemeli döngü (FKD: Phase Locked Loop-PLL) kullanılarak tahmini problemi de tartışıldı. Son olarak ısıl gürültünün karakterizasyonu ve analog iletişim sistemlerinde iletim kayıplarının etkileri tanımlandı.

Bölüm 7 analog-sayısal dönüşüme ayrılmıştır. Örnekleme teoremi ve niceleme teknikleri ilk olarak ele alınmıştır ve bunları PCM (Pulse Code Modulation -DKM), DPCM (Differential Pulse Code Modulation-FDKM)) ve DM (Delta Modulation-DM) gibi dalga formu kodlama yöntemleri takip etmiştir. Bu bölüm ses kodlama için LPC (Linear Prediction Coding-DÖK) ve resim sıkıştırma için JPEG standartları üzerine kısa bir tartışma ile bitirilmiştir.

8. Bölüm temelband AWGN (TBGG) kanallar için modülasyon yöntemlerini ele almaktadır. Farklı tipte ikili ve ikili olmayan modülasyon teknikleri işaret gösterimlerinin geometrisine dayalı olarak tanımlanmış ve bunların performansları hata olasılığı cinsinden değerlendirilmiştir. Bu bölümün en son konusu sayısal iletişim sistemleri için işaret senkranizasyon yöntemleri üzerine yoğunlaşmaktadır.

Bölüm 9'da, bandsınırlı TBGG (AWGN) kanallarda sayısal iletişim problemi ele alınmıştır. İletilen işaret üzerindeki kanal bozma etkisi simgeler arası girişim (ISI) cinsinden karakterize edilmiş ve ISI (Inter Symbol Interference: *Bk.* SAK))'nın bastırılması için uyarlanır denkleştiricilerin tasarımı açıklamıştır.

Taşıyıcı modülasyonu ile sayısal işaret iletimi Bölüm 10'da açıklanmıştır. Bu bölümde ele alınan taşıyıcı modülasyon teknikleri darbe genlik modülasyonu (DGM: Pulse Amplitude Modulation-PAM), faz kaydırmalı anahtarlama (FKA: Phase Shift Keying-PSK), dördün genlik modülasyonu (DÖGM Quadrature amplitute modulation-QAM), frekans kaydırmalı anahtarlama (FKA: Frequency

Shift Keyin-FSK) ve sürekli faz frekans kaydırmalı anahtarlama (SF-FKA: Continous Phase Frequency Shify Keying - CPFSK) teknikleridir.

Sayısal iletişimde birkaç seçilmiş uygulama Bölüm 11'de ele alınmıştır. Bunlar sönümlü çoklu yollu kanallarda iletişim, çok taşıyıcılı modülasyon (dikgen frekans bölmeli çoğullama), yayılı spektrum işaretler ve sistemler, GSM ve IS95 sayısal hücresel iletişim sistemlerinin kısa bir tanımlaması ve serbest uzay (görüş hattı) kanallarda ağ bütçe analizidir.

12. Bölüm, hafızasız kaynakların bilgi içeriği ve eklemeli beyaz Gauss gürültü kanallarının kapasitesi gibi, bilginin iletişimi üzerindeki temel kısıtlar üzerine yoğunlaşmıştır. Sayısal kaynakların kodlanması için yaygın olarak kullanılan Huffman kodlama ve Lempel-Ziv algoritmaları da ayrıca bu bölümde tanımlanmıştır.

13. Bölüm kitabın en son bölümüdür ve kanal kodlama ve kod çözmeyi ele almaktadır. Doğrusal blok kodlar ve evrişimsel kodlar, eklemeli beyaz Gauss gürültünün varlığı altında sayısal iletişim sistemlerinin performansını iyileştirmek için tanımlanmışlardır. Blok ve evrişimsel kodların hem katı-karar ve hem de esnek-karar kod çözümleri de ele alınmıştır. Bu bölümde ayrıca band sınırlı kanallar için kodlama (trellis kodlanmış modülasyon), turbo kodlar ve düşük yoğunluklu eşlik sınama kodları da ele alınmıştır.

Kitap boyunca teoride geliştirilmiş olan tekniklerin kullanımını vurgulayan birçok örnek sunulmuştur. Her bölüm sonunda farklı zorluk seviyelerine sahip çok sayıda problem içermektedir. Her bölümde verilen problemin arkasından o bölümde geliştirilmiş farklı algoritmaların MATLAB kullanılarak simülasyonunun istendiği bilgisayar problemleri sunulmuştur. MATLAB problemlerinin çözümleri PH web sayfasında bu kitap için verilmiştir.

DERS OPSİYONLARI

Bu kitap iletişim sistemleri üzerinde bir dönemlik veya iki dönemlik bir ders için ders kitabı olarak kullanılabilir. Dersin içeriğini belirlerken dikkat edilmesi gereken önemli bir unsur öğrencinin olasılık ve rastgele süreçler ile ilgili daha önceden bir ders alıp almadığıdır. Diğer önemli bir unsur ise analog modülasyon ve demodülasyon tekniklerinin eklenip eklenmeyeceğidir. Aşağıda biz üç senaryo öngördük. Farklı senaryolar da mümkündür.

1. Analog ve sayısal iletişim üzerine tek dönemlik bir ders: Bölüm 2 ve 5'ten seçilmiş bazı özet bölümler ile Bölüm 3, 4, 6, 7 ve 8'in tümü ve Bölüm 7-13'den seçilmiş kısımlar.
2. Sayısal iletişim üzerine tek dönemlik bir ders: Bölüm 2 ve 5'ten seçilmiş bazı özet bölümler ile Bölüm 7-13.
3. Analog ve Sayısal İletişim konusunda iki dönemlik ders dizisi:
   - İlk Ders İçin Bölüm 2-6
   - İkinci Ders İçin Bölüm 7-13

Teşekkür

Bu kitabın taslağını gözden geçirenlere (Stephen Wilson, Virginia Üniversitesi; Dennis Goeckel, Massachusettes Üniversitesi, Amherst; Costas N. Georghiades, Texas A&M Üniversitesi; Selin Aviyente, Michigan State Üniversitesi; and Robert Morelos-Zaragoza, San Jose State Üniversitesi) yorum ve tavsiyeleri için teşekkür etmek isteriz.

Onların tavsiyeleri farklı konularda yaklaşımlarımızın bir hayli iyileştirilmesini sağladı.

Ayrıca Gloria Doukakis'a taslağın hazırlanmasında göstermiş olduğu yardım için teşekkür ederiz.

John G. Proakis
Profesör,
California at San Diego Üniversitesi
ve Emekli Profesör,
Northeastern Üniversitesi,

Masoud Salehi
Northeastern Üniversitesi,

1

Giriş

Hemen hemen her gün, gerek iş ortamında ve gerekse eğlence sırasında modern haberleşme sistemleri ve haberleşme araçları ile karşılaşmaktayız. Bu sistemlerden en sık karşılaştıklarımız televizyon, radyo ve telefondur. Bu haberleşme araçları sayesinde diğer insanlar ile anında haberleşebiliyor, günlük işlerimizi gerçekleştiriyor, dünyanın farklı yerlerinde meydana gelen önemli olaylar ve farklı gelişmeler hakkında bilgi alabiliyoruz. Elektronik posta ve faks iletimi ise yazılı mesajların çok uzak mesafelere ulaşmasını hızlandırmıştır.

Telefonsuz, radyosuz ve televizyonsuz bir dünyayı hayal edebilir miyiz? Düşündüğümüzde bu modern haberleşme sistemlerinin sadece yakın geçmişte icat edildiği ve geliştirildiğini fark ederiz. Aşağıda son iki yüz yıl içerisinde modern haberleşme sistemlerinin gelişiminde büyük etkileri olan gelişmelerin kısa bir tarihsel özeti sunulacaktır.

1.1 TARİHSEL ÖZET

Telgraf ve Telefon

Haberleşme sistemleri açısından önemli buluşlardan biri Alessandro Volta tarafından 1799 yılında pilin bulunmasıdır. Bu buluş Samuel Morse tarafından 1837 yılında gösterimi yapılan telgrafın geliştirilmesini mümkün kılmıştır. İlk telgraf hattı Washington ve Baltimore arasından 1844 yılında işletime alınmıştır. Morse Tablo 1.1'de sunulmuş olan farklı uzunluktaki ikili kodların kullanımını önerdi. Bu kodlamada alfabedeki karakterler nokta ve çizgi dizileri şeklinde temsil edilmişti. Sık kullanılan karakterler kısa kodlar ile temsil edilirken daha az kullanılan karakterler ise daha uzun kodlar ile temsil edilmiştir.

TABLO 1.1 MORSE KODU

A	·—	N	—·
B	—···	O	———
C	—·—·	P	·——·
D	—··	Q	——·—
E	·	R	·—·
F	··—·	S	···
G	——·	T	—
H	····	U	··—
I	··	V	···—
J	·———	W	·——
K	—·—	X	—··—
L	·—··	Y	—·——
M	——	Z	——··

(a) Harfler

1	·————
2	··———
3	···——
4	····—
5	·····
6	—····
7	——···
8	———··
9	————·
0	—————

(b) Sayılar

Nokta (.)	·—·—·—	Bekleme işareti	·—···
Virgül (,)	——··——	Çift çizgi	—···—
Soru işareti (?)	··——··	Hata işareti	····
Alıntılama (")	·—··—·	Ayırma işareti	—··—·
İki nokta (:)	———···	Mesaj sonu	·—·—·
Noktalı virgül (;)	—·—·—·	İletim sonu	···—·—
Parantez ( )	—·——·—		

(c) Noktalama ve özel karakterler

Morse kodu Bölüm 12'de ele alınacak olan değişken-uzunlukta kaynak kodlama yönteminin ilk atasıdır. Morse tarafından geliştirilen ve *telgraf* olarak isimlendirilen bu elektriksel haberleşme yönteminin bir sayısal haberleşme sistemi olduğu fark edilmelidir ve bu sistemde karakterler ikili bileşenlerden oluşan değişken-uzunlukta kod kelimeleri ile kodlanmıştır.

Yaklaşık kırk yıl sonra, 1875 yılında Emile Baudot sabit uzunlukta ikili kod kelimeleri kullanarak harflerin kodlandığı bir kod geliştirmiştir. *Baudot kod* olarak adlandırılan bu yöntemde ikili kod bileşenleri eşit uzunluğa sahiptir ve boşluk ve işaret olarak düzenlenmiştir.

Telgraf haberleşmesindeki en önemli gelişme 1858 yılında Amerika ve Avrupa arasında denizaltı kablosunun döşenmesidir. Bu kablo sadece dört haftalık bir işletme süresinden sonra kullanılamaz duruma geldi. İkinci deneme bir kaç yıl sonra gerçekleştirildi ve işletmeye Haziran 1866 yılında alındı.

Telefon ise 1870'li yıllarda icat edilmesinden sonra hayatımıza girdi. Alexander Graham Bell telefon buluşu için 1876, 1877 de farklı patentler aldı ve Bell Telefon Şirketini kurdu. Telefon haberleşme sistemlerinin ilk versiyonları göreceli olarak basit idi ve sadece birkaç mil uzaklığa iletim gerçekleştirilebiliyor idi. Telefon ser-

vislerinin hem kalite ve hem de mesafe olarak önemli gelişmeler kaydetmesi, yirminci yüzyılın ilk on yılında karbon mikrofonların ve indükleme sargılarının icat edilmesi ile mümkün olmuştur.

1906 yılında, Lee DeForest triode kuvvetlendiricilerini icat ederek telefon haberleşme sistemlerinde işaretlerin güçlendirilmesini mümkün kılmış ve böylece telefon işaretlerinin çok daha uzun mesafelere iletimi gerçekleştirilebilmiştir. Örneğin kıtalar arası telefon iletişimi 1915 yılında mümkün olabilmiştir.

Iki dünya savaşı ve 1930'lu yıllardaki Büyük Ekonomik Kriz kıtalar arası telefon iletişiminin yaygınlaşmasını engelleyen bir faktör olmuştur. Ancak 1953 yılında ilk kıtalar arası telefon kablosu Amerika ve Avrupa arasında telefon servislerini mümkün kılmıştır.

Otomatik anahtarlama, telefonun gelişimindeki diğer önemli bir adım idi. Strowger tarafından 1897 yılında geliştirilmiş olan otomatik anahtar bir elektromekanik adım-adım anahtar idi. Bu tip anahtarlar birkaç on yıl kullanımda kaldı. Transistörün icadı ile birlikte elektronik (sayısal) anahtarlar ekonomik olarak kullanılabilir hale geldi. Bell Telefon Laboratuarlarında geliştirilmesinden sonra ilk sayısal anahtar 1960 yılında İllinois de kullanıma alınmıştır.

Son kırk yılda ise, telefon haberleşmesinde önemli gelişmeler kaydedilmiştir. Fiber optik kablolar bakır kabloların yerine kullanılmaya başlanmış ve elektronik anahtarlar tüm eski elektromekanik anahtarların yerini almıştır.

Kablosuz Haberleşme. Kablosuz haberleşme sistemlerinin geliştirilmesi Oersted, Faraday, Gauss, Maxwell ve Hertz'in on dokuzuncu yüzyılda gerçekleştirmiş oldukları çalışmaların bir sonucudur. 1820 yılında Oersted elektrik akımının bir manyetik alan oluşturduğunu göstermiştir. 1831 yılı 29 Agustos günü Michael Faraday bir iletken yakınlarında mıknatısın hareket ettirilmesi ile akım indüklendiğini göstermiştir. Dolayısı ile manyetik alanının değiştirilmesi ile elektrik alan üretildiğini gösterilmiş oldu. Bu ilk çalışmanın üzerine James C. Maxwell 1864 yılında elektromanyetik radyasyonun varlığını öngörmüş ve yaklaşık yüzyıldan fazladır kullanılan temel teoriyi formüle etmiştir. Maxwell'in ortaya koyduğu bu teori Hertz tarafından 1887 yılında deneysel olarak doğrulanmıştır.

1894 yılında radyo sinyallerine duyarlı olan ve *coherer* olarak adlandırılan bir cihaz Oliver Lodge tarafından geliştirilmiş ve İngiltere, Oxford'da 150 yard'lık bir mesafede kablosuz iletişim gerçekleştirilmiştir. Guglialmo Marconi *kablosuz telgrafı* geliştiren kişi olarak kayıtlara geçti. 1901 yılı 12 Aralık'ta Marconi Newdounlanda Signal Tepesi'nde yaklaşık 1700 mil uzaklıktaki İngiltere'deki Cornwall şehrinden gönderilen radyo sinyallerini aldı.

Vakum tüplerin icad edilmesi radyo haberleşme sistemlerinin gelişiminde hayli önemli bir süreç idi. İlk vakum diyot Fleming tarafından 1904 yılında icat edilmiş ve vakum triode kuvvetlendirici ise, daha önce açıklandığı gibi, 1906 yılında DeForest tarafından icat edilmişti. Yirminci yüzyılın ilk yıllarında, triode'nun icadı radyo yayınlarını mümkün kılmıştır. Genlik modülasyonu (GM:

Amplitute Modulation-AM) yayıncılığı 1920 yılında KDKA, Pittsburg radyo istasyonunun kurulması ile başlamıştır. Bu tarihten sonra GM-radyo yayıncılığı hızlı bir şekilde tüm dünyada gelişmiştir. *Superheterodyne GM radyo alıcı* Birinci Dünya Savaşı yıllarında Edwin Armstrong tarafından icat edildi. Radyo haberleşmesi açısından önemli olan diğer bir gelişme de Amstrong tarafından Frekans Modülasyonun (FM: Frequency Modualiton-FM) geliştirilmesi olmuştur. 1933 yılında Amstrong ilk FM haberleşme sistemini gerçekleştirdi ve gösterimini yaptı. Ancak FM yayıncılık GM yayıncılık kadar hızlı bir gelişme gösteremedi. Ancak İkinci Dünya Savaşı'nın bitimden sonra FM yayıncılık popülerlik kazancı ve ticari olarak geliştirildi.

İlk televizyon sistemi V. K. Zworykin tarafından Amerika Birleşik Devletleri'nde inşa edildi ve 1929 yılında denendi. Ticari yayıncılık ise 1936 yılında İngiliz Yayıncılık Şirketi (BBC) tarafından başlatıldı. Beş yıl sonra FCC tarafından televizyon yayıncılığına Amerika Birleşik Devletleri'nde izin verildi.

Son Elli Yıl. Haberleşme servislerinde son elli yılda meydana gelen gelişmeler sıradışıdır. Bu süre içerisinde meydana gelen önemli gelişmeler; 1947 yılında Walter Brattain, John Bardeen ve William Shockey tarafından transistörün icat edilmesi, 1958 yılında Jack Kilby ve Robert Noyce tarafından entegre devrelerin icadı ve 1958 yılında Townes ve Schawlow tarafından lazerin bulunması şeklinde sıralanabilir. Bu icatlar küçük boyutlarda, küçük güç ve ağırlıkta ve yüksek hızda elektronik devrelerin gerçekleştirilmesini mümkün kılmıştır. Bu devreler ise uydu haberleşme sistemleri, genişband mikrodalga radyo sistemleri ve fiber optik kabloların kullanıldığı haberleşme sistemlerinin geliştirilmesinde kullanılmıştır. Telstar olarak isimlendirilen bir uydu 1962 yılında fırlatılmış ve Avrupa ile Amerika arasındaki TV işaretlerinin iletiminde kullanılmıştır. Ticari haberleşme sistemleri ise 1965 yılında Early Bird isimli uydunun fırlatılması ile başlamıştır.

Şu anda birçok kablolu iletişim sistemleri fiber optik kabloları kullanmaktadır ve bu oldukça büyük bir bandgenişliği sunmakta ve ses, veri ve video işaretleri gibi oldukça geniş bilgi kaynaklarının iletimini mümkün kılmaktadır. Cep telefonları hareket halinde olan insanlara telefon servisi sunmak amacı ile geliştirilmiştir.

Günümüzde ses, veri ve video iletimini gerçekleştiren özellikle kişisel haberleşme servislerinin kullanımı ve yeni servislerin tanıtılmasında büyük bir gelişme gözlemlenmektedir. Uydu ve optik ağlar tüm dünyada yüksek hızda haberleşme imkanları sunmaktadır. Gerçekten de bu modern haberleşme çağının başlangıcı, şafağıdır.

Geçen yüzyılı kapsayan ve radyo ve haberleşme sistemlerindeki gelişmeleri tarihsel süreç içerisinde ele alan birçok çalışma mevcuttur. Örneğin *Bir Mesleği İcra Etmek: Amerika'da Elektrik Mühendislerinin Dönemi (IEEE Yayıncılık 1984)* isimli McMahon tarafından yazılmış kitap; Ryder ve Fink tarafından yazılmış *Mühendisler ve Elektronik (IEEE Yayıncılık, 1984)* isimli çalışma ve S Millman, Editör, tarafından *Bell Sistem'de Mühendislik ve Bilim Tarihi – Haberleşme Bilimleri (1925-1980)* isimli kitaplar örnek olarak sayılabilir.

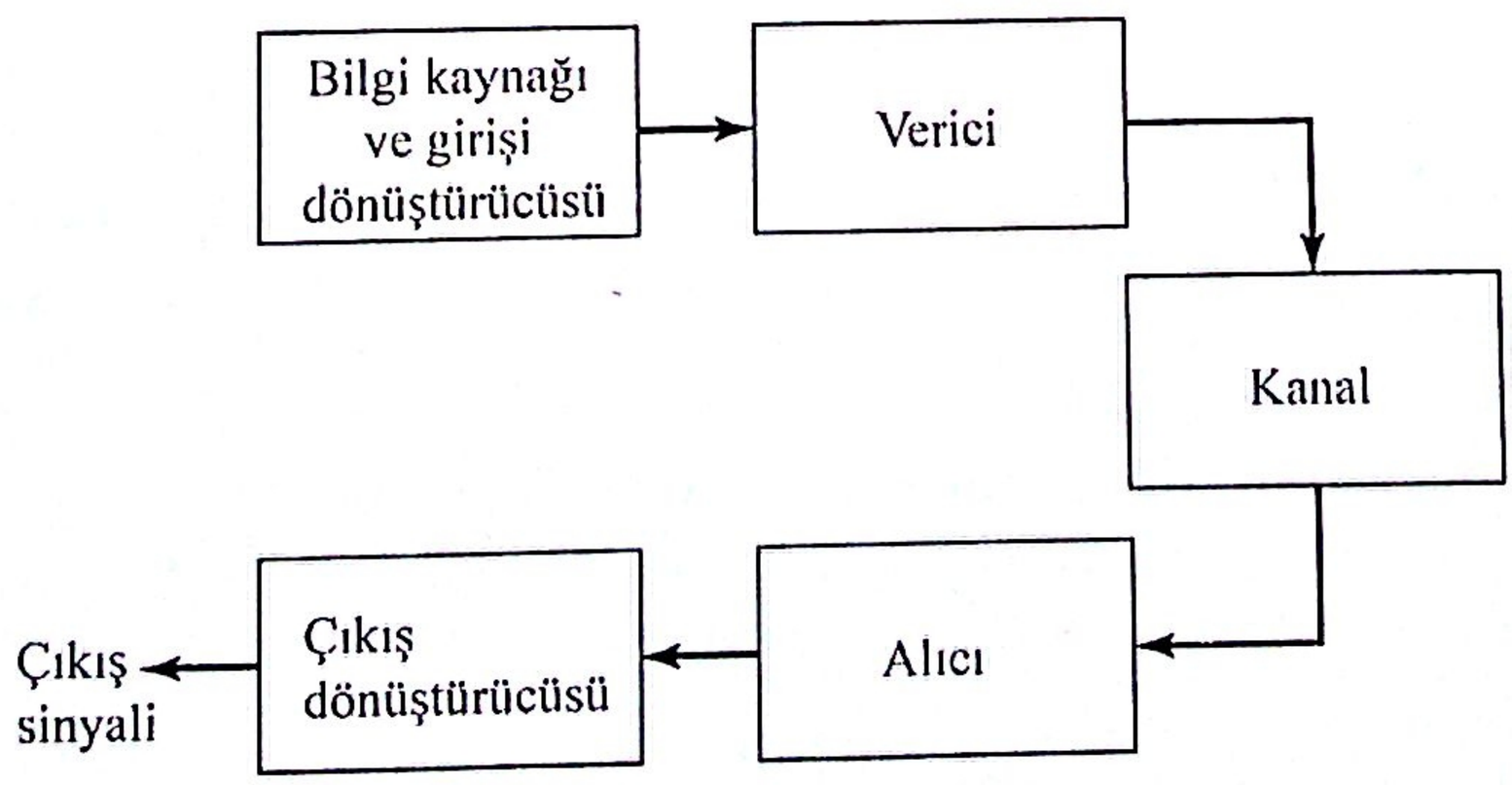
1.2 ELEKTRONİK HABERLEŞME SİSTEMLERİNİN BİLEŞENLERİ

Elektronik haberleşme sistemleri bir kaynak tarafından üretilen bilgi ve mesajı birden farklı hedefe iletmek için tasarlanmış sistemlerdir. Genel olarak, bir elektronik haberleşme sistemi Şekil 1.1'de gösterilmiş olan fonksiyonel bloklardan oluşmuştur. Kaynak tarafından üretilen bilgi ses formunda, resim formunda veya İngilizce, Japonca, Almanca, Fransızca gibi belirli bir dildeki düz metin şeklinde olabilir. Bilgi üreten kaynakların temel karakteristiği çıkışlarının olasılık kavramı içerisinde tanımlanmış olmasıdır. Yani sistem çıkışı deterministik değildir. Aksi halde bu mesajı iletmenin hiçbir anlamı olmazdı.

Çevirici, kaynak tarafından üretilen çıkışı, iletim için daha uygun olan elektriksel işarete dönüştürür. Örneğin mikrofon akustik ses işaretlerini elektriksel işarete dönüştüren bir çevirici olarak davranır, bir video kamera resmi elektriksel işarete dönüştürür. Alıcı tarafta, benzer bir dönüştürücü ise elektriksel işaretleri, örneğin ses işaretine veya resim gibi kullanıcılar için uygun bir formata dönüştürür.

Bir haberleşme sisteminin temel bileşenleri *verici, kanal ve alıcı*dır. Bu üç bileşen tarafından gerçekleştirilen fonksiyonlar aşağıda tanımlanmıştır.

Verici. Verici elektriksel işaretleri kanal veya iletim ortamına uygun bir forma dönüştürür. Örneğin radyo veya TV yayıncılığında, FCC (Federal Haberleşme Komisyonu) her bir istasyon için frekans aralığını belirlemiştir. Dolayısı ile verici kendisi için ayrılmış frekans aralığında yayın yapacak şekilde gönderilen bilgiyi dönüştürmelidir. Dolayısı ile birçok radyo istasyonu işaretler birbirine karışmadan aynı anda yayın yapabilir. Benzer şekilde bir telefon iletim sisteminde birçok kullanıcının ses işaretleri aynı kablo üzerinden birbirine karışmadan iletilebilir.



Şekil 1.1 Bir haberleşme sisteminin fonksiyonel bileşenleri

Genel olarak, verici mesaj işaretini bu işaretin taşınacağı kanala uygun hale getirir. Bu işlem modülasyon olarak adlandırılır. Modülasyon, mesaj işaretini sistematik bir şekilde bir taşıyıcı işaretin genlik, frekans veya fazını değiştirmek için kullanıldığı bir süreçtir. Örneğin bir GM radyo yayıncılığında, iletilecek mesaj işareti merkez frekansı bu radyoya tahsis edilmiş frekans bandında olan bir sinusoidal taşıyıcı işaretin genliğinde iletilir. Bu *genlik modülasyonu*na bir örnektir. FM radyo yayıncılığında ise iletilecek mesaj işareti taşıyıcı sinusoidal işaretin frekans değişimine gömülmüştür ve *frekans modulasyonuna* bir örnek olarak verilebilir. *Faz modulasyonu* (*FzM*: Phase Modulation-PM) ise mesaj işaretini bir taşıyıcı sinusoidal işaret üzerine yerleştirmenin bir başka yöntemidir.

Daha önce belirtildiği gibi, GM, FM ve FzM gibi taşıyıcı modülasyonları bilgi işaretini iletileceği kanal karakteristiğine uygun hale getirmek için verici tarafta gerçekleştirilen bir işlemdir. Dolayısı ile modülasyon işlemi sayesinde, bilgi işaretini tahsis edilen kanala uygunlaştırmak için frekans çevrimi gerçekleştirilir. Hangi modülasyon yönteminin kullanılacağı, seçileceği tahsis edilen bandgenişliği, mevcut gürültü ve işaretin iletimi esnasında kanalda meydana gelebilecek karışıma ve iletim öncesi işaretin kuvvetlendirilmesi için kullanılacak elektronik düzeneklerin mevcudiyeti gibi çok farklı faktörlere bağlıdır. Her durumda modülasyon birçok farklı kullanıcının mesajının aynı fiziksel kanal üzerinde iletimini mümkün kılacak bir süreçtir. Modülasyonun yanında genellikle vericide gerçekleştirilmesi gereken diğer fonksiyonlar bilgi işaretinin süzgeçlenmesi, modüle edilmiş işaretin kuvvetlendirilmesi ve kablosuz iletişim durumunda bu işaretin verici antenler vasıtası ile yayımlanmasıdır.

Kanal. Haberleşme kanalları bir işareti vericiden alıcıya iletmek için kullanılan fiziksel ortamlardır. Kablosuz haberleşmede kanal genellikle atmosfer (serbest uzay)dır. Diğer taraftan telefon kanalları klasik kablolar, fiber optik kablolar ve kablosuz (mikrodalga) gibi farklı ortalamaları kullanırlar. İşareti göndermek için kullanılan fiziksel ortam ne olur ise olsun, bu kanalların ortak özelliği iletilecek işaretin farklı mekanizmalar tarafından rastgele bir tarzda bozulmaya uğratmalarıdır. En yaygın karşılaşılan bozulma şekli, işaret kuvvetlendirme işleminin gerçekleştirildiği, alıcının ön ucunda (front end) meydana gelen toplanır gürültü (additive noise)dir. Bu gürültü genellikle *ısıl gürültü* olarak isimlendirilir. Kablosuz iletimde, diğer toplanır gürültü şekilleri insan kaynaklı gürültü ve alıcı antenler tarafından toplanan atmosferik gürültülerdir. Otomobillerin ateşlemesi esnasında oluşan gürültü insan kaynaklı gürültüye örnek olarak verilebilirken, yıldırımlar yüzünden oluşan elektriksel boşalma da atmosferik gürültüye örnek olarak verilebilir. Diğer kanal kullanıcılarından dolayı oluşan karışım (interference) da kablolu veya kablosuz haberleşmede ortaya çıkan toplanır gürültüye verilebilecek örnekler arasındadır.

Bazı haberleşme kanallarında, örneğin kısa-dalga radyo yayınlarında kullanılan iyonosferik kanalda, çok yolluluk (multipath) bir başka sinyal bozulma nedenidir. Bu tür bozulmalar toplanır olmayan sinyal bozulması olarak karakterize edilir ve işaretin genliği üzerinde, zaman bayılması olarak isimlendirilen zamana bağımlı değişim olarak karşımıza çıkar. Bu olay altbölüm 3.1'de detaylı olarak ele alınmıştır.

Hem toplanır ve hem de toplanır olmayan bozulmalar rastgele süreçler olarak karakterize edilir ve istatistiksel terimler ile tanımlanır. Haberleşme sistemlerinin tasarımı aşamasında bu işaret bozulmalarının etkileri göz önüne alınmalıdır.

Haberleşme sistemlerinin tasarımı aşamasında, sistem tasarımcısı fiziksel kanalda gözlemlenebilecek işaret bozulmalarını karakterize eden matematiksel modeller ile çalışır. Sıklık ile bu matematiksel modellerde kullanılan istatistiksel tanımlamalar bu tür kanallar üzerinde işaret iletimi esnasında yapılmış olan deneysel ölçümler ile elde edilmiş sonuçlara dayanır. Bu tür uygulamalarda haberleşme sistemlerinin tasarımında kullanılan matematiksel modeller fiziksel olarak gerekçelendirilmelidir. Diğer yandan, bazı haberleşme sistem tasarımlarında kanalın karakteristiği zaman ile büyük ölçüde değişim gösterir. Bu tür durumlarda sistem tasarımcısı farklı işaret bozulmalarına karşı dayanıklı bir sistem tasarlamalıdır. Bu, kanal bozulmalarına uygun olarak bazı parametrelerini değiştiren bir sistem tasarımı ile gerçekleştirilebilir.

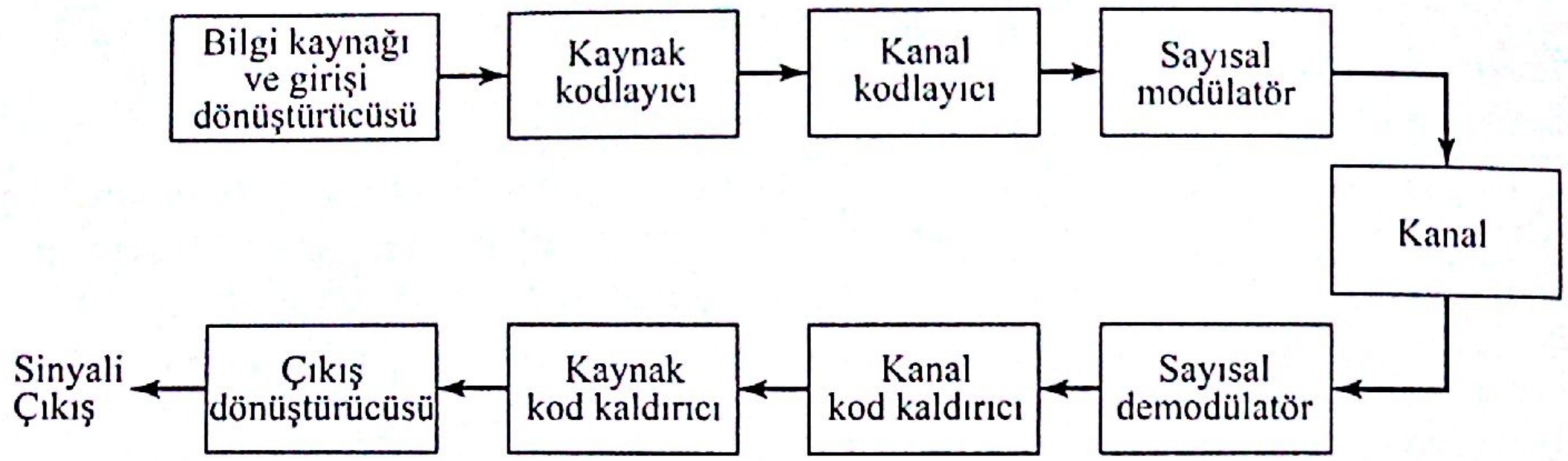
Alıcı. Alıcının işlevi mesaj işaretini alıcı antenlerdeki işaretten yeniden elde etmektir. Eğer mesaj işareti bir taşıyıcı modülasyonu ile iletilmiş ise alıcı tarafta bir demodulasyon gerçekleştirilmelidir. İşaretin demodulasyonu toplanır gürültü ve diğer işaret bozucu etkenler altında gerçekleştirildiğinden, demodüle edilmiş mesaj işareti genellikle bu etkenlerden dolayı belirli bir oranda bozulmuş olacaktır. Daha sonra göreceğimiz gibi, demodüle edilmiş mesaj işaretinin orijinal işarete benzerliği kullanılan modülasyon tipine ve toplanır gürültünün şiddetine bağımlı olacaktır.

İşaret, demodulasyon gibi temel işlevlerinin ötesinde bir alıcı işaretin süzgeçlenmesi ve gürültünün bastırılması gibi diğer yan işlevleri de gerçekleştirir.

1.2.1 Sayısal Haberleşme Sistemi

Bu noktaya kadar, geniş bir çerçevede elektriksel haberleşme sistemlerinin tanımlanması yapıldı. Bu tanımlamalarda mesaj işaretinin sürekli zamanlı bir dalgaformu olduğu kabulü yapıldı. Bu tür işaret dalgaformları *analog işaretler* ve bu tür işaretleri üreten bilgi kaynakları da *analog kaynaklar* olarak tanımlanacaktır. Analog işaretler haberleşme kanallarında taşıyıcı modülasyonu yöntemi ile doğrudan iletilebilir ve alıcıda da benzer şekilde demodüle edilebilirler. Bu tür işaretleri ileten haberleşme sistemleri *analog haberleşme sistemleri* olarak adlandırılır.

Bir başka yöntem ise analog kaynakların çıkışlarını sayısal forma dönüştürmek ve sayısal modülasyon ile işaretin iletilmesi ve alıcı da ise sayısal işaret olarak demodüle edilmesidir. Analog işaretlerin sayısal modülasyon yöntemleri ile iletilmesinde bazı potansiyel avantajlar vardır. En temel neden sayısal iletimde işaretin orijinal işarete benzerliğinin analog iletime nazaran daha iyi kontrol edilebilirliğidir. Özellikle, sayısal haberleşme uzun mesafe iletişimde sayısal işaretin yeniden üretimini mümkün kılar ve dolayısı ile gürültünün bozucu etkisinin her yeniden üretim aşamasında yok edilmesi sağlar. Buna karşın, analog haberleşmede işarete eklenmiş olan gürültü, uzun mesafe iletişimde her kuvvetlendirme safhasına işaret ile birlikte kuvvetlendirilir.



Şekil 1.2 Sayısal haberleşme sisteminin temel bileşenleri

Sayısal iletiminin tercih edilmesinin diğer bir nedeni ise analog işaretin yüksek derecede artık (redundant) bilgi içermesidir. Sayısal işlemler ile bu artıklık modülasyon aşamasından önce yok edilir ve böylece kanal bandgenişliği tasarruf edilir. Üçüncü bir neden ise sayısal haberleşme sistemlerinin genellikle daha ucuz olmasıdır.

Bazı uygulamalarda, iletilecek bilgi doğasında sayısal olabilir. Örneğin İngilizce metin, bilgisayar verisi gibi. Bu tür durumlarda veriyi üreten bilgi kaynağı ayrık (sayısal) kaynak olarak adlandırılır.

Sayısal haberleşme sistemlerinde alıcı ve vericide gerçekleştirilen işlevsel işlemlere, verici tarafta mesaj işaretinin ayrıklaştırılması ve alıcı tarafta ise işaretin sentezlenmesi veya aradeğerlemesi gibi ek işlevler yapılmalıdır. Bunun yanı sıra artıklığın yok edilmesi, kanal kodlama ve kod çözme gibi işlevler de eklenmelidir.

Şekil 1.2 bir sayısal haberleşme sistemindeki işlevsel diyagramları ve temel bileşenleri göstermektedir. Kaynak çıkışı ses veya video işaretleri gibi analog olabileceği gibi zamanda ayrık ve sınırlı sayıda çıkış karakteri içeren sayısal işaret formunda olabilir. Sayısal haberleşme sistemlerinde, kaynak tarafından üretilen mesajlar genellikle ikili sayı dizisine dönüştürülür. İdeal durumda biz kaynak çıkışını mümkün olan en az ikili sayı ile temsil etmek isteriz. Diğer bir deyiş ile artıklığı mümkün olduğunca azaltmak veya tamamı ile yok etmek isteriz. Analog veya sayısal kaynak çıkışının etkin bir şekilde ikili sayılara dönüştürülmesi işlemi *kaynak kodlama* veya *veri sıkıştırma* olarak adlandırılır. Kaynak kodlama yöntemleri 12. Bölümde ele alınacaktır.

Bilgi dizisi olarak adlandırılan kaynak kodlayıcının çıkışı *kanal kodlayıcıya* iletilir. Kanal kodlayıcının işlevi ikili bilgi dizisinde kontrollü bir şekilde artıklık oluşturmaktır. Bu artıklık, alıcıda işaretin kanaldan iletimi esnasında gürültü ve karışımdan dolayı oluşan etkilerinin giderilmesine kullanılır. Dolayısı ile eklenen bu artıklık alınan işaretin güvenirliliğini artırır ve orijinal işarete benzerliğini iyileştirir. Gerçekte bilgi dizisindeki bu fazlalık, alıcıda bilgi dizisinin kodunun çözülmesinde yardımcı olur. Örneğin, ikili bilgi dizisinin en basit kodlaması herbir ikili sayının m kez tekrarlanması olabilir. Daha karmaşık bir kodlama ise her seferinde k adet bitin alınarak bu k-sayıdaki bitin *kod kelimesi* olarak adlandırılan n-sayıdaki bite dönüştürülmesidir. Bu şekilde verinin kodlanması ile eklenen artıklık n/k oranı ile ölçülür. Bu oranın tersi, yani k/n, *kod oranı* olarak adlandırılır. Kanal kodlama ve kod çözme 13. Bölümde ele alınacaktır.

Kanal kodlayıcının çıkışındaki ikili dizi, haberleşme kanalı ile kodlayıcı arasında bir arayüz gibi davranan *sayısal modülatöre* aktarılır. Pratikte karşılaşılan tüm haberleşme kanalları elektriksel işaretleri (dalgaformlarını) iletebilme kabiliyetine sahip olduğundan, sayısal modülatörün temel görevi ikili sayı formatındaki bilgi dizisini işaret dalgaformuna dönüştürmektir. Bu konuyu daha geniş olarak ele alabilmek için, kodlanmış bir bilgi dizisinin her defasında bir bit olmak üzere R bit/sn oranında iletildiğini varsayalım. Sayısal modülatör basitçe 0 ikili sayısını $s_0(t)$ dalga formuna dönüştürür iken, 1 ikili sayısını $s_1(t)$ dalga formuna dönüştürecektir. Bu şekilde kanal kodlayıcıdan alınan her bit ayrı olarak iletilecektir. Bu yöntem *ikili modulasyon* olarak adlandırılır. Bir başka yöntem ise modülatörün b sayıdaki kodlanmış bilgi bitini $M=2^k$ adet $s_i(t), i = 0,1,...,M-1$ şeklindeki farklı dalga formundan birini kullanarak iletmesidir. Bu yöntem her bir k-bit uzunluktaki dizi için 2^k sayıda dalga formu sunar. Bu yöntem ise *Çoklu (M-ary) modülasyon* olarak adlandırılır ($M>2$). Her yeni k-bit dizinin her k/R saniyede modülatöre girdiğine dikkat edin. Dolayısı ile kanal bit oranı R sabitlenmiş ise, k-bit uzunluğundaki diziye karşılık gelen M dalga formundan birinin iletimi için gerekli zaman aralığı, ikili modulasyonunlu sistemlerde gerekli zaman aralığının k katı olacaktır.

Sayısal haberleşme sistemlerinin alıcı tarafında, *sayısal demodülatör,* iletilmiş işareti işleyerek kanal tarafından bozulmuş olan dalga formunu, iletilmiş (ikili veya çoklu) simgesi temsil eden, tek bir sayıya çevirecektir. Örneğin, ikili modülasyon kullanıldığında, demodülatör alınan dalga formunu işleyerek 0 veya 1 bitlerinden hangisinin iletilmiş olduğuna karar verir. Bu durumda *modülatör ikili karar* veya *sıfır-bir kararı* gerçekleştiriyor denir. Bir başka alternatif, demodülatörün üçlü karar vermesidir; yani iletilmiş bitin 0 veya 1 olduğuna karar verebileceği gibi, alınan işaret kalitesine bağlı olarak hiç karar vermeyebilir de. Eğer belirli bir bit için bir karar verilememiş ise *demodülatör demodüle edilmiş veri içine bir silme işareti yerleştirdi* denir. İletilmiş verideki artıklık kullanılarak, kod çözücü silme işareti yerleştirilmiş olan konumları doldurmaya çalışır. Demodülatör tarafından gerçekleştirilen karar sürecini bir nicemleme (quantization) şeklinde görür isek, ikili ve üçlü karar sürecinin $Q \geq 2$ olmak üzere Q seviyeye nicemleyen bir demodülatörün özel durumu olduğu gözlemi yapılabilir. Genel olarak, eğer sayısal haberleşme sistemi çoklu (M-ary) modülasyon gerçekleştiriyor ve M burada $k = \log_2 M$ bite karşılık gelen M farklı simgeden birini temsil ediyor ise, demodülatör Q-karar ($\hat{Q} \geq M$) veriyor denir. Nicemlemenin olmadığı özel durumda ise $Q = \infty$ olur.

Eğer iletilmiş bilgi içerisinde artıklık yoksa demodülatör verilen zaman aralığında M dalga formundan hangisinin iletilmiş olduğuna karar vermek zorundadır. Dolayısı ile $Q = M$ şeklindedir ve iletilmiş bilgide artıklık olmadığından demodülatörü izleyen ayrı bir kanal kod çözücünün kullanılması gerekmez. Diğer taraftan, eğer verici tarafta ayrık kanal kodlayıcı tarafından oluşturulmuş bir

artıklık sözkonusu ise, her k/R saniyede demodülatör çıkışında oluşan Q çoklu çıkış, kod çözücüye iletilir. Kod çözücü orijinal bilgi dizisini, kanal kodlayıcının kullanmış olduğu kod bilgisinden ve alınan işaretin içermiş olduğu artıklıktan hareket ile yeniden oluşturmaya çalışır.

Demodülatörün ve kod çözücünün ne kadar başarılı olduğunun ölçüsü, yeniden oluşturulmuş dizide hata oluşma sıklığı ile ölçülür. Daha açık bir deyiş ile, kod çözücünün çıkışında ortalama bit hata olasılığı, demodülatör-kod çözücü ikilisinin performansının bir ölçüsüdür. Genel olarak hata olasılığı, kod karakteristiğine, bilgiyi kanal üzerinden iletmek için kullanılan dalga formunun tipine, verici gücüne, kanal karakteristiğine (örneğin gürültü miktarı gibi) ve demodülasyon ve kod çözme yöntemlerine bağlıdır. Bu konular ve performans üzerindeki etkileri 8. Bölüm ile 10. Bölüm arasında ele alınacaktır.

Son olarak, analog çıkış elde edilmek istenir ise kaynak kod çözücü kanal kod çözücüsünden çıkış dizisini alır ve alıcı tarafta kullanılan kaynak kodlama yöntemi bilgisinden hareket ile, orijinal işareti yeniden oluşturur. Kanal kod çözüm hataları, ve kaynak kodlayıcı ile muhtemel kaynak kod çözücü tarafından oluşturulan bozulmalar nedeni ile kaynak kod çözücünün çıkışında elde edilecek olan işaret orijinal işaretin yaklaşık hali olacaktır. Aradaki fark veya orijinal işaret ile yeniden oluşturulan işaret arasındaki farkın fonksiyonu sayısal iletişim sistemi tarafından oluşturulan hatanın bir ölçütü olacaktır.

1.2.2 Sayısal Haberleşme Konusunda İlk Çalışmalar

Gerçi ilk sayısal haberleşme sistemlerinin (telgrafın) gelişimi Morse'a dayandırılsa da, bizim bugün modern sayısal haberleşme olarak adlandırdığımız sistemler konusundaki çalışmaların başlangıcı Nyquist (1924)'ın çalışmalarına dayanır. Nyquist bir telgraf kanalı üzerinde simgeler arası karışım (girişim) oluşmadan, verilen bir bandgenişliği içerisinde, maksimum işaret gönderme hızının belirlenmesi üzerinde çalışmalar yapmıştır. Telgraf sisteminin modelini formülize etmiş ve bu model de iletilen işareti

$$s(t) = \sum_n a_n g(t - nT)$$

şeklinde göstermiştir. Burada g(t) temel bir darbe şeklini ve $\{a_n\}$ ise 1/T bit/sn hızında iletilen ve $\{\pm 1\}$ simgelerden oluşan bir ikili veri dizisini temsil etmektedir. Nyquist, W genişliğine sahip optimum darbe şeklini belirlemeyi amaçlamıştır. Bu darbeyi kullanarak $1/T$ bit hızını, $k/T, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ örnekleme zamanlarında simgeler arası karışım olmayacak şekilde maksimize etti. Çalışmaları maksimum darbe hızı $1/T$'in $2W$ darbe/sn olduğunu gösterdi. Bu oran *Nyquist oranı* olarak adlandırılır. Ayrıca bu darbe hızı $g(t) = (\sin 2\pi Wt)/2\pi Wt$ şeklindeki darbelerin kullanılması durumunda elde edilebilir. Bu darbe şekli örnekleme zamanlarında simgeler arası girişim olmadan verinin tekrar üretilebilmesine imkan sağlar. Nyquist'in elde ettiği sonuçlar daha sonraları Shannon (1948) tarafından detaylandırılmış olan bandsınırlı

işaretler için örnekleme teoreminin bir versiyonu idi. Örnekleme teoremi W bandgenişliğine sahip bir işaretin $2W$ Nyquist hızında alınmış örneklerinden aşağıdaki aradeğerleme formülü kullanılarak yeniden oluşturulabileceğini ifade eder.

$$s(t) = \sum_n s\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin 2\pi W(t - n/2W)}{2\pi W(t - n/2W)}.$$

Nyquist'in elde ettiği sonuçlardan hareket ile Hartley (1928) çoklu genlik seviyelerinin kullanılması durumunda, sınırlı bandgenişliğine sahip bir kanal üzerinden güvenilir bir şekilde gönderilebilecek veri miktarı üzerinde çalışmıştır. Gürültü ve diğer karışımların varlığı nedeni ile Hartley alıcının alınan işaret genliklerini ancak belirli bir doğruluk ile, örneğin A_δ ile, güvenilir bir şekilde tahmin edebileceğini öne sürdü. Bu çalışmalarının sonucunda Hartley sınırlı bandgenişliğine sahip kanallarda, maksimum genlik seviyesi A_{max} (sabit güç varsayımı) ve genlik çözünürlüğü A_δ olarak alınır ise, güvenilir bir şekilde haberleşmeyi sağlayabilecek maksimum bir veri hızı olduğu sonucuna vardı.

Haberleşme gelişmelerinde diğer önemli bir adım ise Wiener (1949)'in yapmış olduğu çalışmalardır. Wiener $r(t) = s(t) + n(t)$ olarak gösterilen ve alıcı tarafta gözlemlenen işaretten hareket ile toplanır gürültü $n(t)$ altında, aranan işaret dalga formu $s(t)$'in tahmini problemi üzerinde çalışma yapmıştır. Bu problem işaretin demodülasyonu esnasında karşımıza çıkar. Wiener çıkışı aranan $s(t)$ işaretine en iyi karesel yaklaşım olabilecek doğrusal süzgeç belirlemiştir. Bu süzgeç *optimal doğrusal (Wiener) süzgeç*i olarak adlandırılır.

Hartley ve Nyquist'in sayısal bilginin maksimum iletim hızı üzerindeki çalışmaları Shannon(1948a, b)'un çalışmalarına öncülük etmiştir. Shannon bilgi teorisi için matematiksel temelleri oluşturmuş ve sayısal haberleşme sistemleri için temel limitleri elde etmiştir. Bu öncü çalışmasında Shannon güvenilir bilgi iletiminin temel problemlerini, bilgi kaynağı ve haberleşme kanallarının probabilistik modellerine dayanarak, istatistiksel temeller üzerine inşa etti. Bu istatistiksel formulasyona dayalı olarak, bilgi içeriğinin ölçümü için logaritmik bir ölçek önerdi. Ayrıca verici gücü, bandgenişliği kısıtları ve toplanır gürültünün etkilerinin kanal ile ilişkilendirilebileceğini ve bunların *kanal kapasitesi* olarak isimlendirilen tek bir parametre ile temsil edilebileceğini göstermiştir. Örneğin, toplanır beyaz (düz spektruma sahip) Gauss gürültü altında, W ideal bandgenişliğine sahip bir kanal

$$C = W \log_2\left(1 + \frac{P}{WN_0}\right) \text{ bits/s}$$

olarak verilen bir C kapasitesine sahiptir. Burada P ortalama iletilen güç ve N_0 toplanır gürültünün güç spektral yoğunluğudur. Kanal kapasitesinin önemi şudur: Eğer bir bilgi kaynağından alınan bilgi hızı R, C'den küçük ise ($R<C$) bu durumda teorik olarak uygun bir kodlama ile bu kanaldan güvenilir (hatasız) bir iletim gerçekleştirilebilir. Diğer yandan, eğer $R>C$ ise güvenilir bir iletim, alıcı veya vericide gerçekleştirilen işaret işleme süreçlerine ne olur ise olsun, mümkün olamaz. Dolayısı ile Shannon bilgi iletişiminin temel limitlerini belirlemiş ve *bilgi teorisi* olarak isimlendirilen bir alanın doğumuna öncülük etmiştir.

Başlangıçta Shannon'un çalışmaları sayısal haberleşme sistemlerinin tasarım ve gelişiminde göreceli olarak önemsiz bir etki yapmıştı.

Bu özellikle 1950'li yıllarda sayısal bilgi yıllarda sayısal bilgi iletimindeki düşük talep ile ilişkili idi. Diğer bir neden ise o yıllarda, Shannon teorisi tarafından öngörülen yüksek güvenirlik ve verime ulaşabilecek sayısal donanımın yüksek karmaşıklık ve maliyet göstermesi idi.

Sayısal haberleşme alanına yapılan diğer önemli bir katkıda Kotelnikov'un (1947) çalışmalarıdır. Bu çalışmalar farklı sayısal haberleşme sistemlerinin uyumlu bir analizini sağlayan geometrik bir yaklaşıma dayanmakta idi. Bu yaklaşım daha sonraki yıllarda Wozencraft ve Jacobs (1965) tarafından geliştirilmiştir.

Sayısal veri iletiminde son otuz yıl içerisinde görülen yüksek talep ile birlikte sayısal tümleşik devrelerde meydana gelen gelişmeler, daha verimli ve yüksek güvenirliliğe sahip sayısal haberleşme sistemlerinin gelişimini sağlamıştır. Bu süreçte, Shannon'un elde ettiği sonuçlar ve daha sonra bu sonuçların bir kanal üzerinden gerçekleştirilebilecek maksimum iletim ve ulaşılabilecek maksimum performans sınırlarını belirlemek için genelleştirilmesi, haberleşme sistemlerinin tasarımında karşılaştırma yapılabilecek denektaşı olarak kullanıldı. Shannon ve diğer araştırmacılar tarafından ortaya konulan ve bilgi teorisinin gelişimine katkıda bulunan teorik limitler, daha etkin sayısal haberleşme sistemleri geliştirme ve tasarımında nihai hedef olarak hizmet görmektedir.

Shannon'un çalışmalarını Hamming (1950) tarafından yapılan çalışmalar izlemiştir. Hamming kanal gürültüsünün bozucu etkisi ile mücadele etmek için hata-bulan ve hata-düzelten kodları geliştirmiştir. Hamming'in bu çalışmaları birçok araştırmacıya ilham kaynağı olmuş ve günümüzde modern haberleşme sistemlerinde uygulanan farklı ve güçlü yeni kodların bulunmasını sağlamıştır.

1.3 HABERLEŞME KANALLARI VE KARAKTERİSTİKLERİ

Daha önceki bölümlerde belirtildiği gibi haberleşme kanalı alıcı ile vericiyi birleştirmektedir. Fiziksek kanallar elektriksel işareti taşıyan bir çift kablo olabileceği gibi, bilgiyi taşımak için modüle edilmiş ışık huzmesinin iletildiği fiber optik kablo veya su altında akustik yöntemler ile bilginin iletildiği su altı kanalı veya antenler vasıtası ile bilgi içeren işaret ışımasının iletildiği serbest uzay olabilir. Haberleşme kanalı olarak karakterize edilebilecek diğer ortamlar ise manyetik teyp, manyetik disk ve optik diskler vb.dir.

Bir kanalda işaret iletiminde karşılaşılan en yaygın problem toplanır gürültüdür. Genel olarak, toplanır gürültü haberleşme sistemlerini oluşturan direnç veya elektronik bileşenlerden kaynaklanır. Bu tür gürültü genellikle *termal gürültü* olarak adlandırılır. Diğer gürültü ve karışım kaynakları sistem dışı kaynaklar olabilir. Örneğin kanaldaki bir başka kullanıcıdan kaynaklanan karışım gibi. Bu tür gürültü ve karışımlar iletmek istediğimiz işaret ile aynı frekans bandını işgal ederler ise, bunların etkisi iletilecek işaretin ve alıcıdaki demodülatörün uygun tasarımı ile azaltılabilir. Diğer işaret bozulmaları kanalda iletim esnasında meydana gelen zayıflatma, genlik ve faz bozulması ve çoklu-yol bozulmasıdır.

Gürültünün etkisi iletilen işaretin gücü artırılarak azaltılabilir. Gerçi kullanılan düzenek ve diğer fiziksel kısıtlamalar uygulanabilecek gücü sınırlamaktadır. Diğer temel bir sınırlama da kullanılabilir kanal bandgenişliğidir. Bandgenişliği sınırlaması genellikle kullanılan ortama ve verici ve alıcıda kullanılan elektronik bileşenlerin limitleri ile ilgilidir. Bu iki sınırlama bir haberleşme kanalı üzerinde güvenilir bir şekilde gönderilebilecek verinin miktarını belirlemektedir.

Aşağıda farklı haberleşme kanallarının önemli karakteristiklerini ele alacağız.

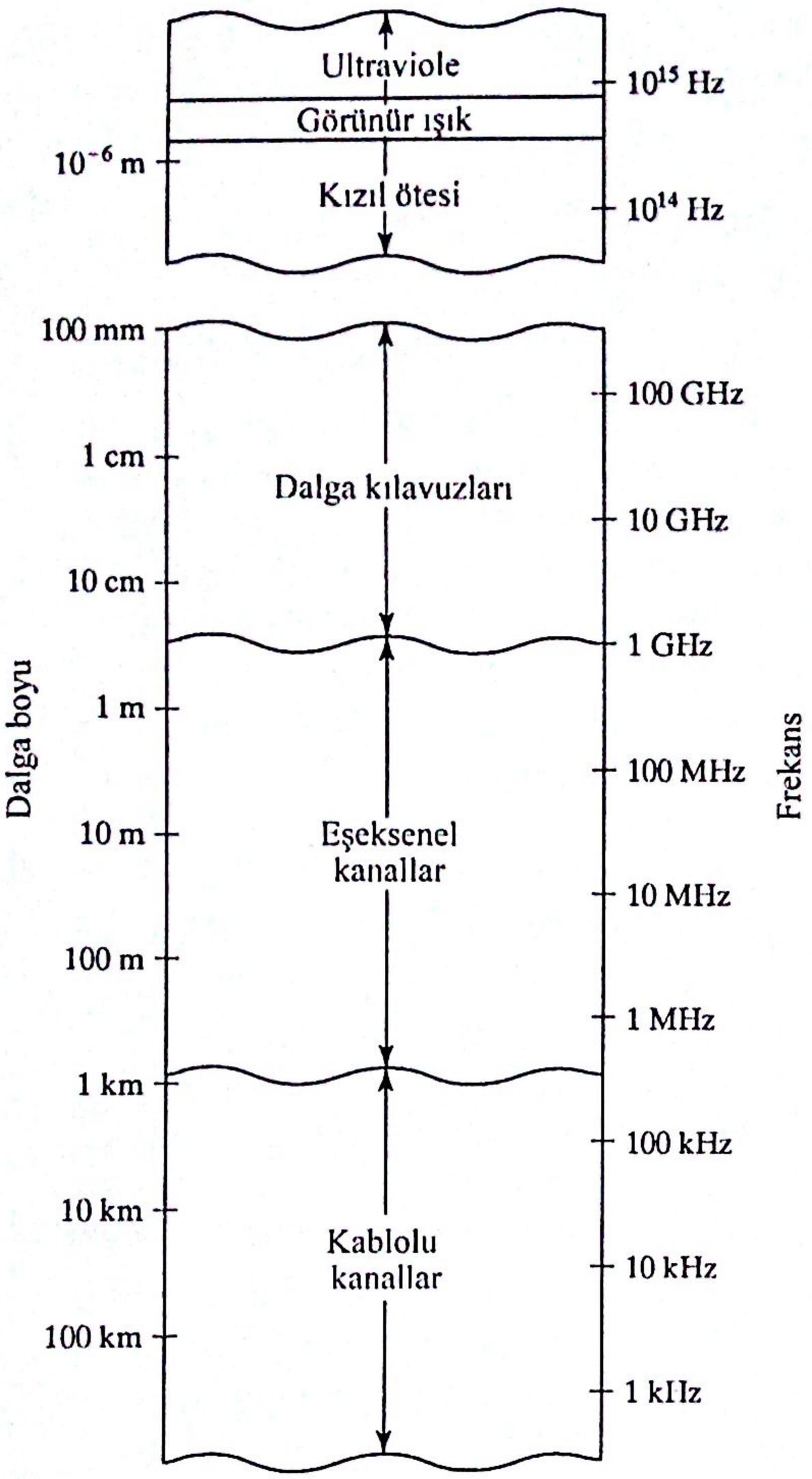
Kablolu Kanallar

Telefon ağları ses işaretlerinin yanında veri ve video iletimi için yoğun olarak kullanılmaktadır. Bükülü tel çifti (twisted-pair) ve eşeksensel (coaxial) kablolar klavuzlu elektromanyetik kanallardır ve göreceli büyüklükte bir bandgenişliği sunarlar. Genellikle kullanıcıyı merkezi bir ofise bağlayan telefon hatları birkaç yüz kilohertz (kHz) bandgenişliğine sahiptir. Diğer taraftan, eşeksensel kabloların kullanılabilir bandgenişliği birkaç megahertz (MHz) mertebesindedir. Şekil 1.3, dalga klavuzları ve fiber optik hatları da içeren, klavuzlu elektromanyetik kanalların frekans aralığını göstermektedir.

Bu tür kanallardan iletilen sinyalin hem genlik ve hem de fazı bozulmaya uğrar. Ayrıca toplanır gürültü tarafından da ek bir bozulma oluşturulur. Bükülü tel çifti ayrıca fiziksel olarak bitişik kanallardan kaynaklanan çaprazkarışma (crosstalk) karışımına maruz kalabilir. Kablolu kanallar günlük haberleşmenin büyük bir oranını karşılamakta olduğu için bu iletimin özelliklerini karakterize etmek ve işaret iletimi esnasında ortaya çıkan genlik ve faz bozulmalarını simule etmek için birçok araştırma yapılmıştır. Bölüm 9'da optimum iletilmiş işaret tasarımı ve bunların demodülasyonu ele alınacaktır. Ayrıca kanalda meydana gelen genlik ve faz bozulmalarını ortadan kaldırmak için *kanal denkleştirici* tasarımı ele alınacaktır.

Fiber Optik Kanallar. Fiber optik kablolar haberleşme sistem tasarımcısına eşeksenel kabloların bandgenişliğinin birkaç katı büyüklükte bir bandgenişliği sunar. Geçen son on yıl içinde, araştırmacılar düşük işaret zayıflatmasına sahip fiber optik kablolar ile işaret üretimi ve tespitini gerçekleştirecek yüksek güvenirliliğe sahip fotonik araçlar geliştirdiler. Bu tür teknolojik gelişmeler fiber optik kabloların gerek ülke içi haberleşme sistemlerinde ve gerek ise kıtalar ve atlantik ötesi haberleşmede hızla yaygınlaşmasını sağladılar. Fiber optik kabloların sunmuş oldukları oldukça büyük bandgenişliği sayesinde, telefon şirketleri müşterilerine ses, veri, faks ve video iletimi gibi farklı haberleşme servisleri sunabilmektedir.

Fiber optik sistemlerde verici veya modülatörler LED veya lazer gibi ışık kaynaklarıdır. Bilgi mesaj işareti ile orantılı değişen (modüle edilen) ışık şiddeti sayesinde taşınır. Bu ışık fiber içerisinde bir ışık dalgası olarak yayılır ve belirli aralıklar sinyal zayıflamasına karşın kuvvetlendirilir (Sayısal iletim örneğinde ışık tespit edilir ve tekrarlayıcılar kullanılarak yeniden üretilir.).

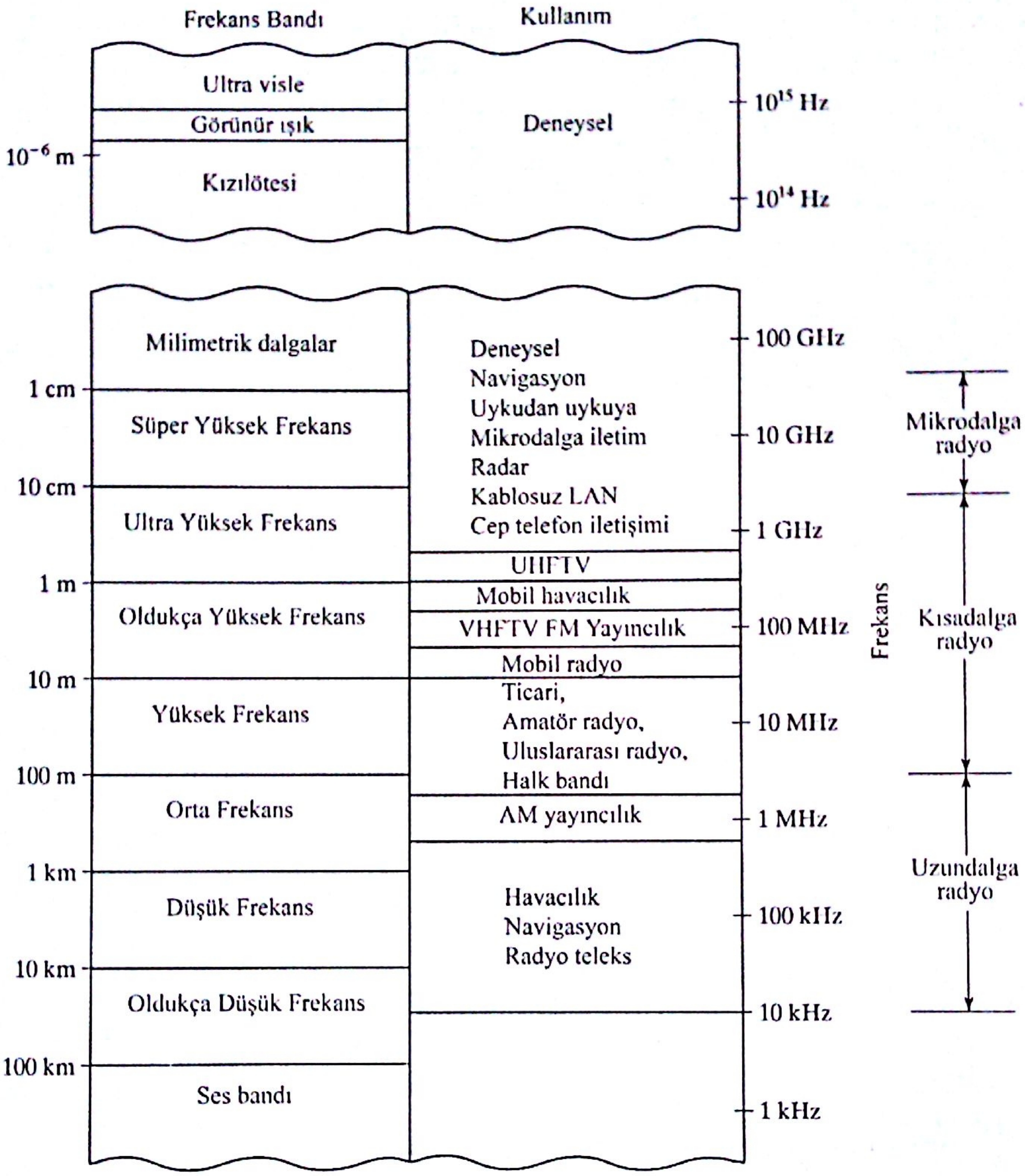


Şekil 1.3. Klavuzlu kablo kanalların frekans aralığı

Alıcıda ışık şiddeti bir fotodiyot tarafından tespit edilir ve çıkışında diyot üzerine düşen ışık şiddeti ile değişim gösteren bir elektriksel işaret üretilir.

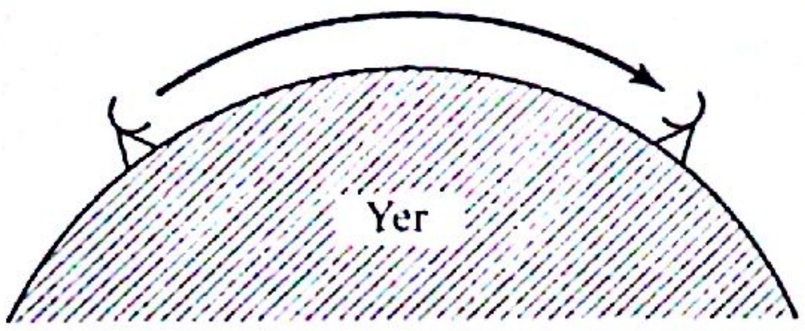
Gelecek beş-on yıl içerisinde fiber optik kanalların mevcut kablolu hatların yerini alacağı öngörülmektedir.

Kablosuz Elektromanyetik Kanallar. Radyo haberleşme sistemlerinde, elektromanyetik enerji iletim ortamına ışınım kaynağı olarak davranan *antenler* sayesinde aktarılır. Antenlerin fiziksel büyüklüğü ve konfigurasyonu işletilen frekansa bağlı olarak değişir. Elektromanyetik enerjinin etkin olarak ışınımı için, anten boyutu dalga boyunun 1/10'dan daha uzun olmalıdır. Bunun doğal bir sonucu olarak, GM frekans bandında yayın yapan bir radyo istasyonu, örneğin 1 MHz (dalga boyu $\lambda = c/f_c = 300\,\text{m}$), en azından 30 metre uzunluğunda bir antene ihtiyaç gösterecektir.

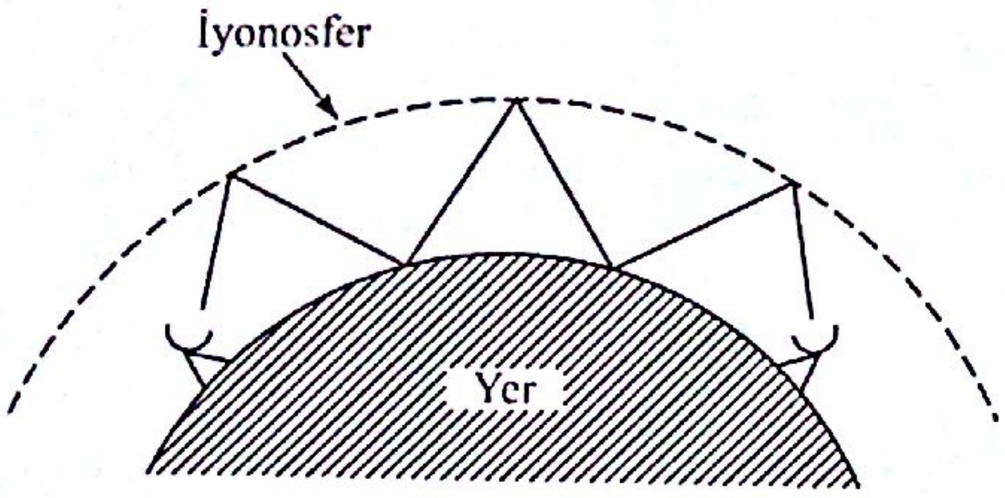


Şekil 1.4. Elektromanyetik kanalların frekans aralığı (Carlson, İkinci Baskı. 1975, McGraw-Hill. Yayıncının izni ile basıldı)

Şekil 1.4. elektromanyetik spektrumun farklı frekans bandlarını göstermektedir. Elektromanyetik dalgaların atmosferde ve serbest uzayda yayılımları üç farklı mod altında kategorize edilebilir; bunlar yer-dalgası, iyonosferik dalga ve görüş-hattı (GH: line-of-sight LOS) yayılımıdır. Dalgaboyunun 10 km'den daha büyük olduğu VLF ve ELF frekans bandlarında yeryüzü ve iyonesfer elektromanyetik dalga yayılımı için dalga klavuzu olarak davranırlar. Bu frekans aralığında haberleşme işareti yeryüzü etrafında dolaşır.



Şekil 1.5. Yer dalgalarının yayılımı



Şekil 1.6. İyonesferik dalgaların yayılımı

Bundan dolayı, bu frekans bandı kıyıdan gemilerin güdümü için kullanılır. Bu kanal bangenişliği göreceli olarak düşüktür (Genellikle merkez frekansının %1-%10 civarında); dolayısı ile bu kanallarda iletilen bilgi düşük hızda ve genellikle sayısal formdadır. Bu frekanslarda meydana gelen gürültünün ana kaynağı yerküre üzerinde, özellikle tropikal bölgelerde, meydana gelen yıldırımlardan dolayı oluşur. Ayrıca bu kanalın diğer kullanıcılarından dolayı kaynaklanan karışımlar sözkonusudur.

Yer dalgalarının yayılımı, Şekil 1.5'de gösterildiği gibi MF (0.3-3 MHz) band frekanslarındaki baskın yayılım modudur. Bu GM yayıncılıkta ve deniz radyoculuğunda kullanılan frekans bandıdır. GM yayıncılıkta, yer dalga yayılımının karakteristiğinden dolayı yüksek güçlü radyo istasyonlarının bile kapsamı 100 milden daha düşüktür. MF bandında atmosferik gürültü, insan yapımı gürültü ve termal gürültü alıcıda işaret iletiminde baskın bozulmaları oluşturur.

İyonesferik dalga yayılımı, Şekil 1.6 da gösterildiği gibi, iletilen işaretin iyonesfer tarafından yansıtılması ile oluşur. İyonesfer yerkürenin yüzeyinden 30 ile 250 mil yükseklikte ve yüklü parçacıkların farklı katmanlarından oluşmaktadır. Gündüz saatlerinde, güneş tarafından alt atmosfer tabakalarının ısıtılması sonucu 75 milin altındaki yüksekliklerde alt tabakalar oluşur. Bu alt tabakalar, özellikle D-tabakası, 2 MHz altındaki frekansları soğurur; dolayısı ile GM radyo yayıncılığı için kullanılan iyonesferik dalgaları büyük oranda sınırlar. Ancak gece saatleri boyunca, iyonesferin alt tabakasındaki elektron yoğunluğu hızlı bir şekilde düşüş gösterir ve gündüz saatlerinde gözlemlenen frekans soğurma önemli ölçüde azalır. Bunun bir sonucu olarak GM radyo yayınları, iyonesferin F-katmanı üzerinden iyonesferik dalgaları kullanarak, 90 milden 250 mile kadar değişen çok daha uzun mesafelere ulaşabilir.

HF frekans bandında elektromanyetik dalga yayılımı ile ilgili yaygın problem *işaret çoklu-yoludur.* İşaret çoklu-yolu, iletilen işaretin farklı yayılım yollarını izleyerek alıcıya farklı zamanlarda ulaşmasından kaynaklanır.

Bu problem sayısal haberleşme sistemlerinde genellikle simgeler arası karışıma neden olur. Dahası farklı zamanlarda alıcıya ulaşan işaret bileşenleri tahrip edici bir şekilde birbiri üzerine eklemlenir ve *işaret bayılması* olarak adlandırılan problemi oluşturur. Birçok kişi bu olayı özellikle iyonesferik dalganın baskın yayılım modu olduğu gece vakti uzak bir radyo istasyonunu dinlerken tecrübe etmiştir. HF bandında toplanır gürültü atmosferik gürültü ile ısıl gürültünün kombinasyonudur.

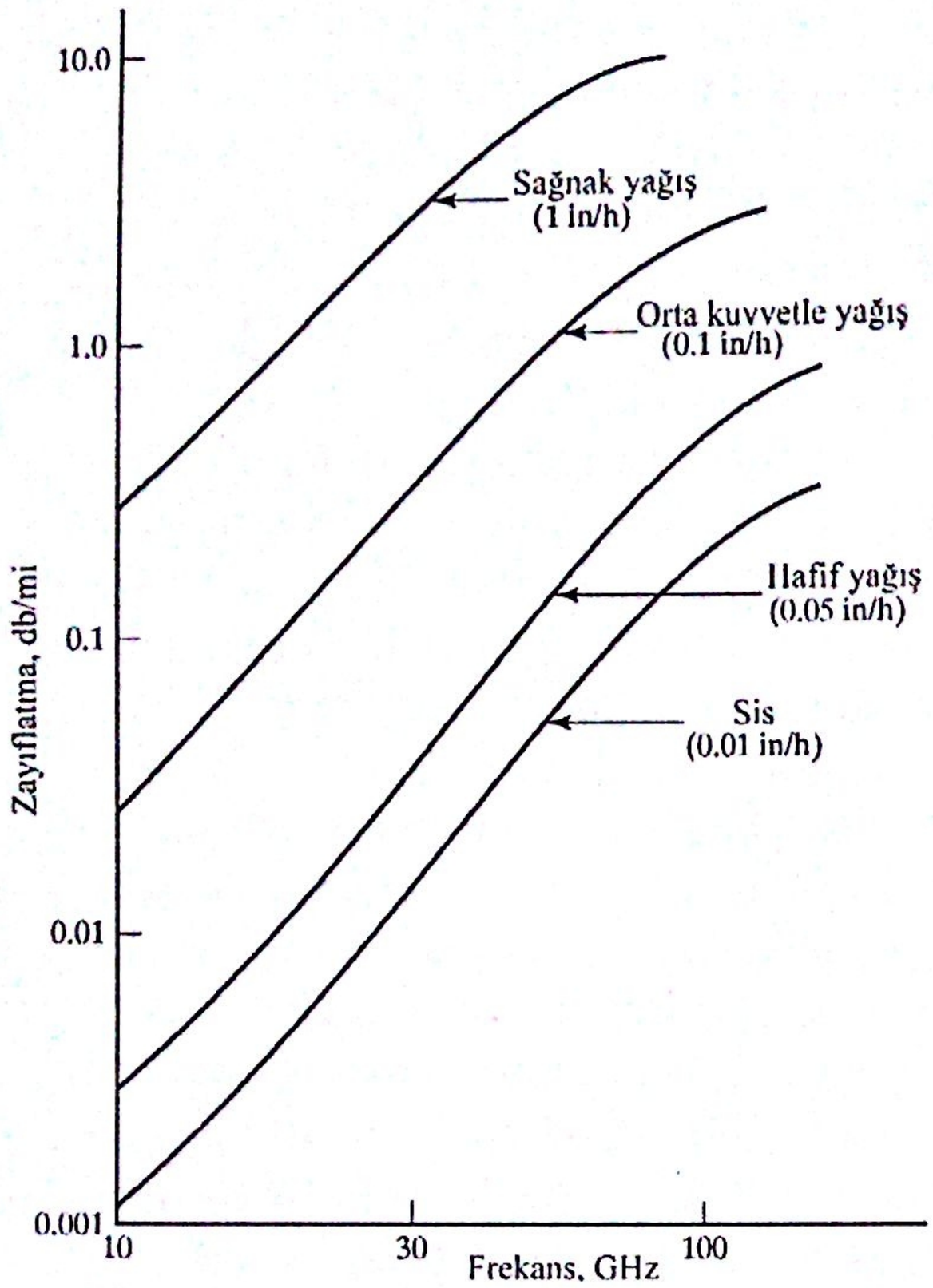
İyonesferik yayılım HF bandın üst sınırını oluşturan 30 MHz üzerindeki frekanslar için mevcut değildir. Gerçi 30-60 MHz frekans aralığında iyonesferik saçılım yayılımı mümkündür. Bu olay işaretin alt iyonesferden saçılmasının bir sonucudur. Ayrıca 40-300 MHz frekans aralığında troposferik saçılımı kullanarak yüzlerce mil üzerindeki uzaklığa yayın yapmak mümkündür. Troposferik saçılma atmosferin 10 mil veya daha altındaki parçacıklardan dolayı meydana gelen saçılma sonucu oluşur. Genel olarak, iyonosferik saçılma ve troposferik saçılma çok büyük işaret yayılım kayıplarına neden olur ve bu yüzden yüksek güçte vericiler ve göreceli olarak büyük antenlere gereksinim duyulur.

30 MHz üzerindeki işaretler iyonosferden az bir kayıp ile geçer ve uydu ve dünya dışı haberleşmeyi mümkün kılar. Bundan dolayı VHF ve üzeri bantlardaki yayılımın baskın modu görüş hattı (*GH: Line of Sight: LS*) yayılımıdır. Yer üstü haberleşme sistemleri için, bunun anlamı verici ve alıcı antenlerin birbirlerini doğrudan ve hiç engelsiz olarak görebilmesidir. Bundan dolayı VHF ve UHF frekans bandında yayın yapan televizyon istasyonları geniş bir kapsam alanına ulaşmak için antenlerini yüksek kulelere yerleştirmektedir.

Genel olarak GH yayılımın kapsam alanı yerkürenin eğriliği ile sınırlandırılmıştır. Eğer bir verici anten yerkürenin yüzeyinden h feet yüksekliğe yerleştirilmiş ise, kapsama uzaklığı yaklaşık olarak $d = \sqrt{2h}$ mil olarak hesaplanabilir. (Dağ vb. fiziksel engellerin olmadığı kabul edilmiştir.) Örneğin 1000 feet yükseklikteki bir kuleye yerleştirilmiş olan TV anteni yaklaşık 50 millik bir kapsama sağlar. Diğer bir örnek ise 1 GHz üzerindeki frekanslarda yayın yapan ve telefon ve video iletiminde kullanılan mikrodalga radyo işaretleri uzun kule veya yüksek binalar üzerine yerleştirilir.

VHF ve UHF frekans bantlarında haberleşme sisteminin performansını sınırlandıran baskın gürültü alıcı ön uçlarında meydana gelen ısıl gürültü ile antenler tarafından toplanan kozmik gürültüdür. 10 GHz üzerindeki SHF bandında işaretin yayılımında atmosferik şartlar etkin rol oynar. Şekil 1.7, 10-100 GHz arasındaki frekans bandında yağışlardan kaynaklanan işaret zayıflamasını dB/mil olarak vermektedir. Sağanak yağışın servis susmasına (haberleşme sisteminin tamamen devre dışı kalmasına) neden olabilecek yüksek bir iletim kaybı oluşturduğu görülür.

EHF frekans bandının üzerindeki frekanslarda elektromanyetik spektrumun kızılötesi ve görünür ışık bölgesi başlar. Bu bant serbest uzayda GH optik haberleşme için kullanılabilir. Şu ana kadar, bu frekans bantları deneysel amaçlı uydudan uyduya haberleşme için kullanılmıştır.



Şekil 1.7. Yağıştan dolayı işaret zayıflaması (Ziemer ve Tranter, 1990, Houghton Mifflin, Yayıncının izni ile yeniden yayımlanmıştır.)

Sualtı Akustik Kanallar. Geçen birkaç on yıl içerisinde okyanus araştırmaları gittikçe artan bir ivme göstermiştir. Okyanusların incelenmesindeki bu artışa paralel olarak sualtındaki sensörlerden toplana verinin su yüzeyine iletimi de ihtiyaç olarak ortaya çıkmıştır. Verinin daha sonra uydular kanalı ile veri toplama merkezlerine aktarılması böylece mümkün olur.

Çok düşük frekans dışındaki elektromanyetik dalgalar sualtında uzun mesafelere yayılamazlar. Ancak çok düşük frekanslı işaretlerin iletimi ise, çok büyük ve güçlü antenlerin kullanılması gerektiğinden, kabul edilemez derecede masraflıdır. Elektromanyetik dalgaların su içindeki zayıflaması *deri kalınlığı* olarak adlandırılan bir terim ile ifade edilir. Bu terim işaretin *1/e* oranında zayıflatıldığı mesafe olarak tanımlanmıştır. Deniz suyu için, deri kalınlığı $\delta = 250/\sqrt{f}$ olarak verilmiştir. Burada f Herzt cinsinden frekans ve δ metre cinsinden uzunluktur. Örneğin, 10 kHz frekansta deri kalınlığı 2.5 m'dir. Buna karşın akustik işaretler su içinde yüzlerce kilometre uzaklığa yayılabilirler.

Sığ bir su akustik kanalı, su yüzeyinden ve deniz dibinde meydana gelecek yansımalardan dolayı çok-yollu bir kanal olarak karakterize edilebilir. Dalga hareketinden dolayı, işaret çok-yollu bileşenleri zaman-bağımlı yayılım gecikmesi gösterir ve bu da işaretin bayılmasına (fading) neden olur. Ayrıca işaret frekansının karesi ile ters orantılı bir frekans bağımlı zayıflama da sözkonusudur.

Denizaltı ortam gürültüsü, balıklar ve farklı memeli deniz canlıları tarafından üretilir. Ayrıca insan yapımı akustik gürültü özellikle liman yakınlarında görülür.

Bu zor ortama rağmen, sayısal işaretleri uzun mesafelere iletebilmek için etkin ve yüksek güvenirliliğe sahip sualtı akustik haberleşme sistemlerinin tasarımı ve uygulaması mümkündür.

Kayıt Kanalları. Bilgi depolama ve geri kazanım sistemleri günlük veri-işleme aktivitelerimizin önemli bir kısmını oluşturur. Manyetik kasetler (sayısal ses ve görüntü kasetleri dahil), manyetik diskler (büyük miktarda bilgisayar verisi kaydetmek için) ve optik diskler (bilgisayar verisi, müzik ve video için), haberleşme kanalları olarak karakterize edilebilecek, veri depolama sistemlerine verilebilecek birkaç örnektir. Verinin manyetik kaset, manyetik disk ve optik diskler üzerine kayıt süreci işaretin bir telefon veya radyo kanalında iletimine denk bir süreçtir. Verinin geri okunması ve depolanmış bilginin yeniden elde edilmesi için uygulanan işaret işleme, telefon alıcısı veya radyo haberleşme sistemlerinin iletilmiş bilgiyi yeniden elde etmek için gerçekleştirdikleri işlevlere benzer.

Elektronik bileşenlerin ürettiği toplanır gürültü ve kayıt alanındaki komşu izlerden kaynaklanan karışım, depolama sistemlerinde işaretin geri okunması esnasında ortaya çıkacak bozulmalardır.

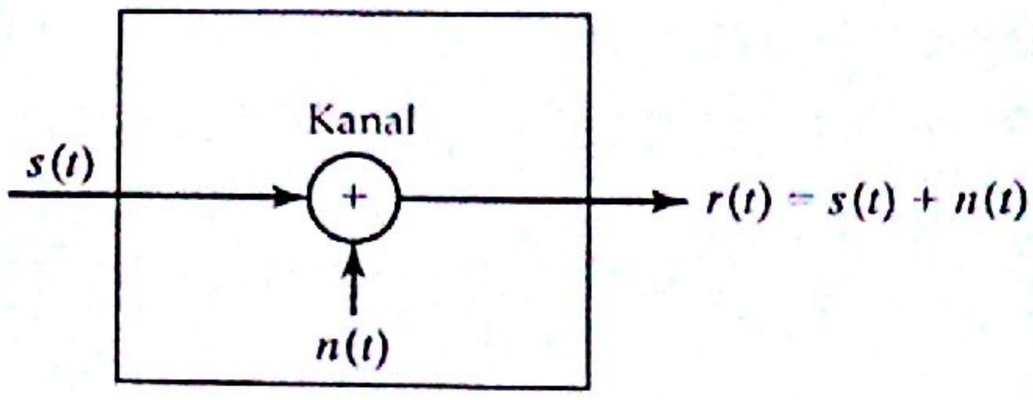
Depolanabilecek verinin miktarı kaset veya diskin büyüklüğü ve yoğunluğu (her inç kareye kayıt edilebilecek bit sayısı) ile sınırlıdır. Yoğunluk yazma/okuma işlevini yerine getirecek elektronik sistem ve yazıcı/okuyucu kafaların yetenekleri ile doğrudan ilişkilidir. Örneğin manyetik depolama sistemlerinde 10^9 bit/kare paketleme yoğunluğuna çoktan ulaşılmıştır. Verinin yazılma ve okunma hızı da mekanik ve elektriksel alt sistemlerin kabiliyetleri ile sınırlanmıştır.

Kanal kodlama ve modülasyon iyi tasarlanmış sayısal manyetik ve optik kayıt sistemlerinin en önemli bileşenidir. Okuma sürecinde, işaret demodüle edilir ve işaret kanal kodlayıcı tarafından eklenmiş olan artıklık, okunan işarette oluşan hataları gidermek için kullanılır.

1.4 HABERLEŞME KANALLARININ MATEMATİKSEL MODELLERİ

Fiziksek kanallar üzerinden bilgi iletimi için haberleşme sistemlerinin tasarımı esnasında, iletim ortamının önemli karakteristik özelliklerini yansıtan matematiksel modellerin oluşturulması çok daha uygundur. Böylece kanalın bu matematiksel modeli vericilerde kanal kodlayıcı ve modülatörlerin, alıcılarda ise kanal kod çözücü ve demodülatörlerin tasarımında kullanılabilir. Aşağıda, pratik uygulamalarda birçok fiziksel kanalı karakterize etmek için sıklıkla kullanılan üç kanal modelinin kısa tanımı sunulacaktır.

Toplanır Gürültü Kanalı. Bir haberleşme kanalının en basit matematiksel modellerden birisi Şekil 1.8'de gösterilen toplanır gürültü kanalıdır. Bu modelde, iletilen işaret $s(t)$, toplanır rastgele gürültü süreci $n(t)$ tarafından bozulmuştur.



Şekil 1.8. Toplanır gürültü kanalı

Fiziksel olarak, toplanır gürültü süreci, radyo işaretlerinin iletimi durumunda sözkonusu olduğu gibi, haberleşme sistemlerinin alıcı ucundaki elektronik bileşen ve kuvvetlendiriciler tarafından üretilir.

Eğer gürültü temel olarak haberleşme sisteminin alıcı tarafındaki elektronik bileşenler ve kuvvetlendirici tarafından üretilir ise, bu gürültü ısıl gürültü olarak karakterize edilebilir. Bu tip gürültüler istatistiksel olarak *Gaussian gürültü süreci* olarak karakterize edilirler. Dolayısı ile bu kanal için elde edilecek olan matematiksel model *toplanır Gaussian gürültü kanalı* olarak adlandırılır. Bu kanal modeli fiziksel haberleşme kanallarının büyük bir kısmı için geçerli bir model olduğundan ve matematiksel olarak incelenebilir oluşundan dolayı haberleşme sistemlerinin analiz ve tasarımında sıklık ile kullanılan bir kanal modelidir. Kanal zayıflatmaları kolaylıkla bu modele entegre edilebilir. Eğer bir işaret kanal boyunca iletimi esnasında zayıflatılıyor ise, alınan işaret

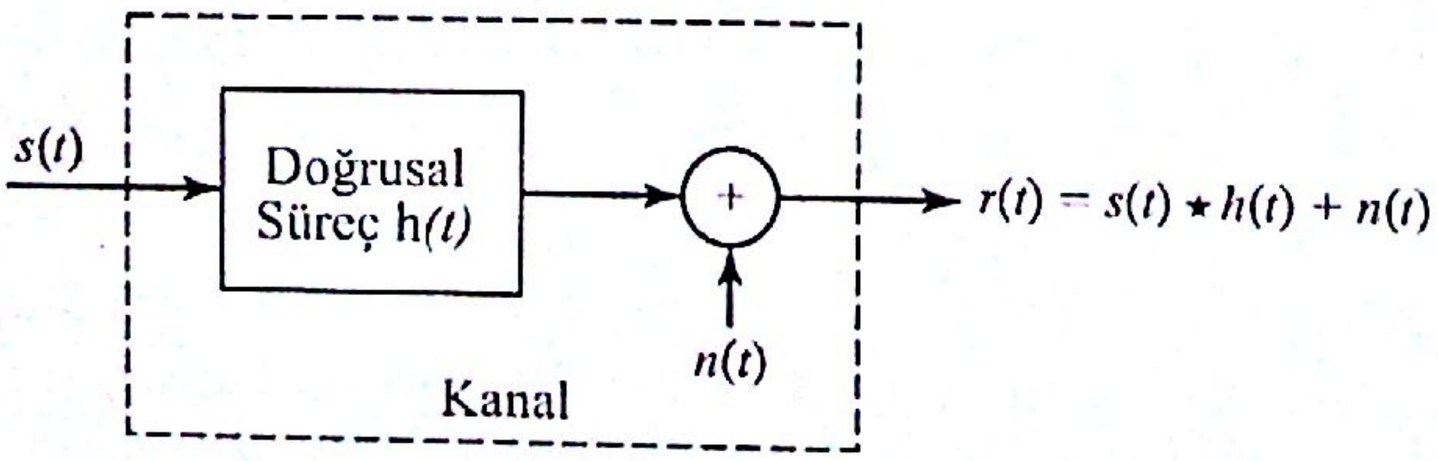
$$r(t) = as(t) + n(t) \tag{1.4.1}$$

olacaktır. Burada a zayıflatma faktörünü temsil eder.

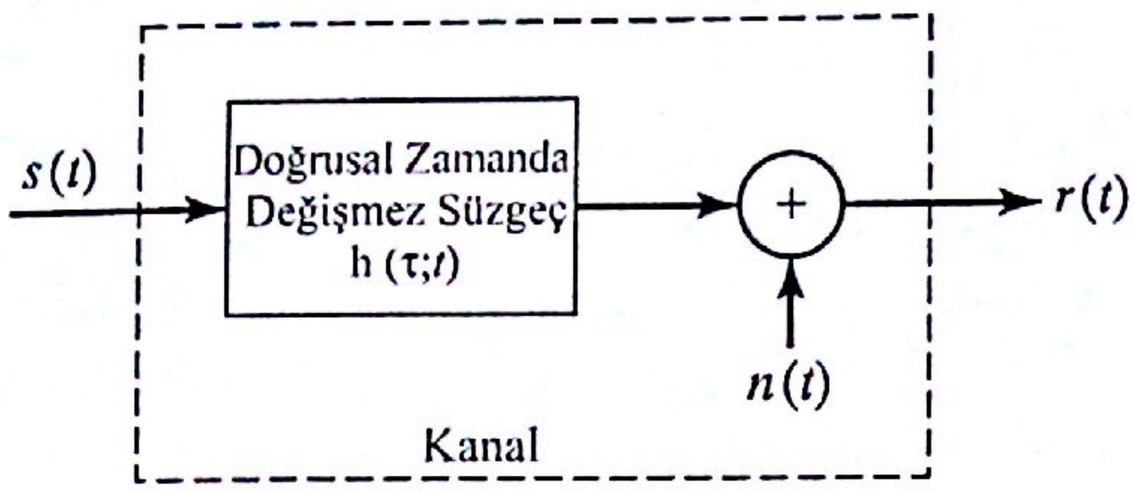
Doğrusal Süzgeç Kanal. Bazı fiziksel kanallarda, örneğin kablolu telefon kanallarında, iletilecek işaretin belirlenmiş olan bandgenişliği sınırlarını aşmaması için süzgeçler kullanılır; böylece işaretler birbirleri ile karışmazlar. Bu tür kanallar Şekil 1.9'da gösterildiği gibi genellikle matematiksel olarak toplanır gürültülü doğrusal süzgeç kanallar olarak modellenirler. Sonuç olarak, eğer kanal girişi $s(t)$ işareti ise, kanal çıkışı

$$\begin{aligned} r(t) &= s(t) \star h(t) + n(t) \\ &= \int_0^\infty h(\tau)s(t-\tau)\,d\tau + n(t) \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $h(t)$ doğrusal süzgeç dürtü cevabıdır ve ★evrişimi temsil eder.



Şekil 1.9 Toplanır gürültülü doğrusal süzgeç kanal



Şekil 1.10. Toplanır gürültülü doğrusal zamanla değişen kanal

Doğrusal Zamanla Değişen Süzgeç Kanal. Sualtı akustik kanallar ve iyonosferik radyo kanalları gibi fiziksel kanallar, iletilen işaretin zamanla değişen çok yollu (multipath) yayılım sözkonusu olduğu için, matematiksel olarak zamanla değişen doğrusal süzgeçler olarak modellenirler. Bu tür süzgeçler $h(\tau;t)$ gibi zamanla değişen dürtü cevabı ile karakterize edilirler. Burada $h(\tau;t)$ süzgecin $t-\tau$ zamanında uygulanmış olan dürtü için t zamanında vermiş olduğu cevabı ifade etmektedir. Bundan dolayı τ "yaşlanma" (geçen süre) değişkeni olarak görülebilir. Toplanır gürültülü, doğrusal zamanla değişen süzgeç kanal Şekil 1.10'da gösterilmiştir. $s(t)$ gibi bir giriş işareti için kanal çıkışı

$$r(t) = s(t) \star h(\tau; t) + n(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau; t)s(t-\tau)\,d\tau + n(t) \tag{1.4.3}$$

şeklinde olur. İyonosfer (30 MHz altındaki frekanslarda) ve mobil hücresel telefon kanalları gibi çok yollu işaret yayılımının olduğu fiziksel kanalları ele alalım. Bu tür kanallar için, zamanla değişen dürtü cevabı için uygun bir model

$$h(\tau; t) = \sum_{k=1}^{L} a_k(t)\delta(\tau - \tau_k) \tag{1.4.4}$$

şeklinde verilir. Burada $\{a_k(t)\}$ L çok yollu yayılım için zamanla değişen zayıflatma faktörünü temsil eder. Eğer (1.4.4) denklemi (1.4.3) denklemine yerleştirilir ise, alınan işaret

$$r(t) = \sum_{k=1}^{L} a_k(t)s(t-\tau_k) + n(t) \tag{1.4.5}$$

formuna sahip olur. Dolayısı ile alınan işaret L adet çok yollu bileşenden oluşur. Bu bileşenlerin her biri $\{a_k\}$ oranında zayıflatma v e $\{\tau_k\}$ değerinde gecikmeye sahip olacaktır.

Yukarıda tanımlanan üç farklı matematiksel model pratik ortamlarda karşılaşılan fiziksel kanalların büyük bir bölümünü karakterize eder. Bu üç kanal modeli bu kitap çerçevesinde haberleşme sistemlerinin analiz ve tasarımında kullanılmıştır.

1.5 İLAVE KAYNAKLAR

Radyo ve telekomünikasyonun tarihçesini ele alan klasik kitaplar metin içerisinde verilmiştir. Bu kitaplar McMahon (1984), Ryder ve Fink (1985) ve Millman (1984) gibi kaynakları ihtiva etmektedir. Ayrıca Nyquist (1924) tarafından gerçekleştirilmiş klasik çalışma, Hartley (1928), Kotelnikov (1947), Shannon (1948) ve Hamming (1950) tarafından ortaya konulmuş çalışmalar belirgin bir önem taşımaktadırlar. Çünkü bu çalışmalar modern haberleşme sistem mühendisliğinin temellerini oluşturan çalışmalardır.

2

İşaretler ve Doğrusal Sistemler

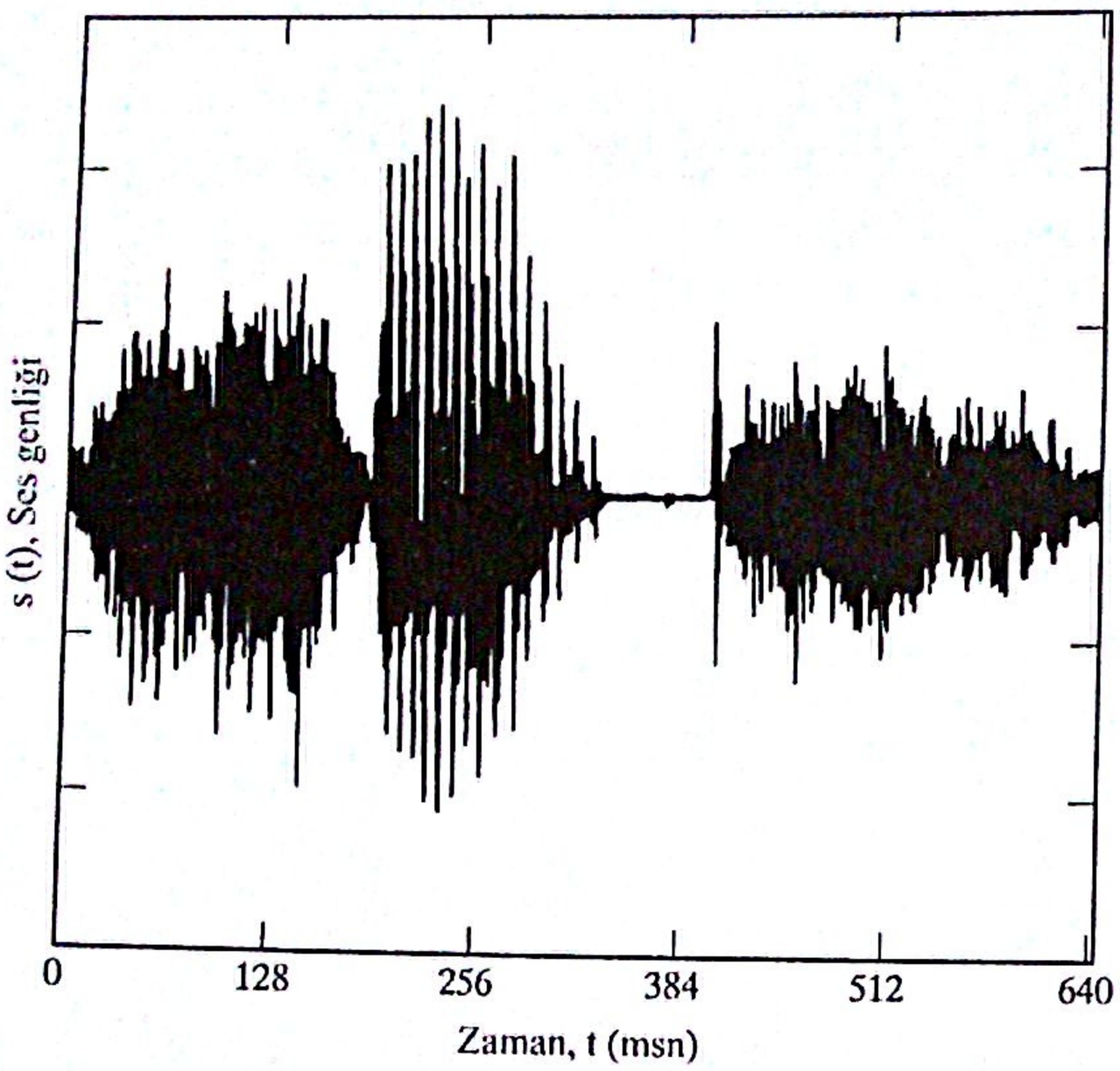
Bu bölümde *işaret* ve *doğrusal (lineer) sistemlerin* temelleri ele alınacaktır. Bu temel konuların ele alınmasının ardındaki motivasyon, bunların farklı haberleşme sistemlerinin modellemesinde oldukça hayati rol oynamasıdır. Özellikle işaretler bir haberleşme kanalı marifeti ile iletilmek için kullanılır. Bu tür işaretler genellikle *bilgi içeren işaretler* olarak adlandırılır. Ses işaretleri, video işaretleri ve bir ASCII terminalin çıkışları bu tür bilgi içeren işaretlere örnek olarak verilebilir.

Bilgi içeren bir işaret bir kanal üzerinden iletildiğinde işaretin şekli kanal tarafından değiştirilir yani *bozulma* oluşur. Diğer bir deyiş ile, *alınan işaret* olarak adlandırılan haberleşme kanalının çıkışı, kanal bozulmaları dahil, birçok nedenden dolayı kanal girişinin mükemmel bir kopyası değildir. Haberleşme kanalı bir sistem olarak görülebilir; yani bir giriş işareti ile uyarıldığında bir çıkış işareti üreten bir birimdir. Haberleşme kanallarının büyük bir kısmı *doğrusal sistemler* olarak ifade edilen bir sistem altkümesi tarafından modellenebilir. Doğrusal sistemler birçok pratik uygulamada karşımıza çıkarlar ve bunların analiz edilmesi daha kolaydır.

2.1 TEMEL KAVRAMLAR

İşaret kavramının bilgi taşıyan herhangi bir fonksiyon olarak tanımlanmış olduğunu hatırlayalım. İşaretler için sadece zamanı bağımsız değişken olarak gördüğümüzden, işaretin zamanın herhangi bir fonksiyonu olduğunu söyleyebiliriz. Bunlara örnek olarak ses işaretleri (konuşma veya müzik), video işaretleri ve veri işaretleri sıralanabilir. Bizim incelemelerimizde işaret matematiksel fonksiyonlar için kullanılan simgeler ile temsil edilecektir. Örneğin $x(t)$ veya $f(t)$ gibi.

İşaret için bir başka örnek ses işaretleridir. Bir ses işareti için *örnek dalga formu* Şekil 2.1'de verilmiştir.



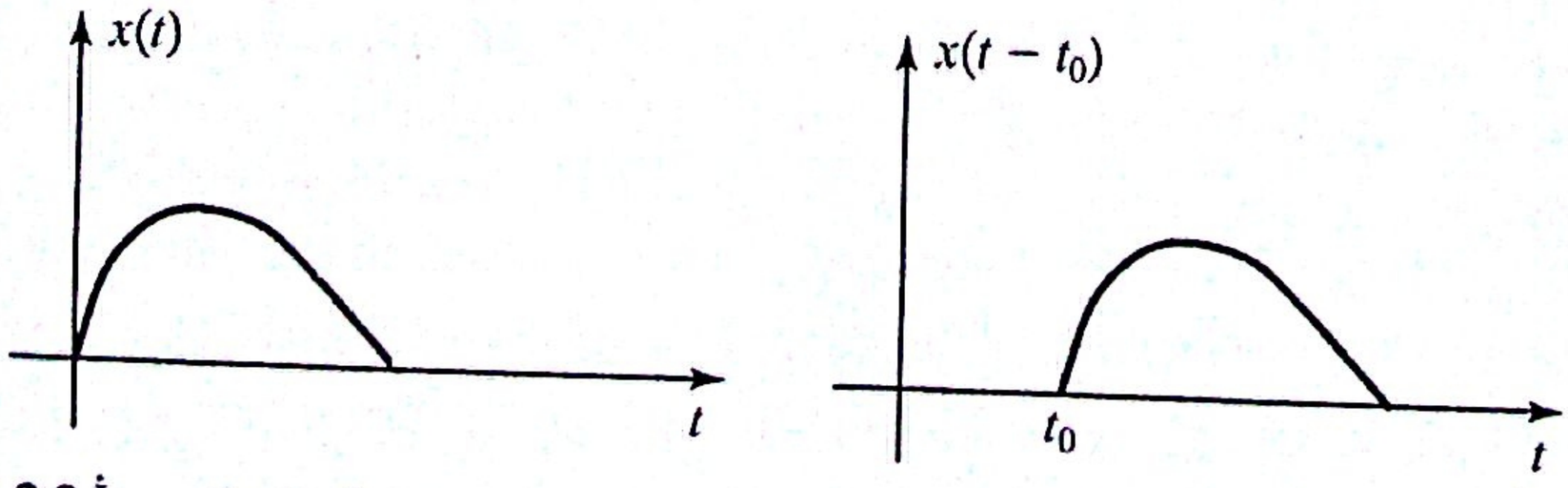
Şekil 2.1 Örnek ses işaret dalga formu

2.1.1 İşaret Üzerinde Temel İşlemler

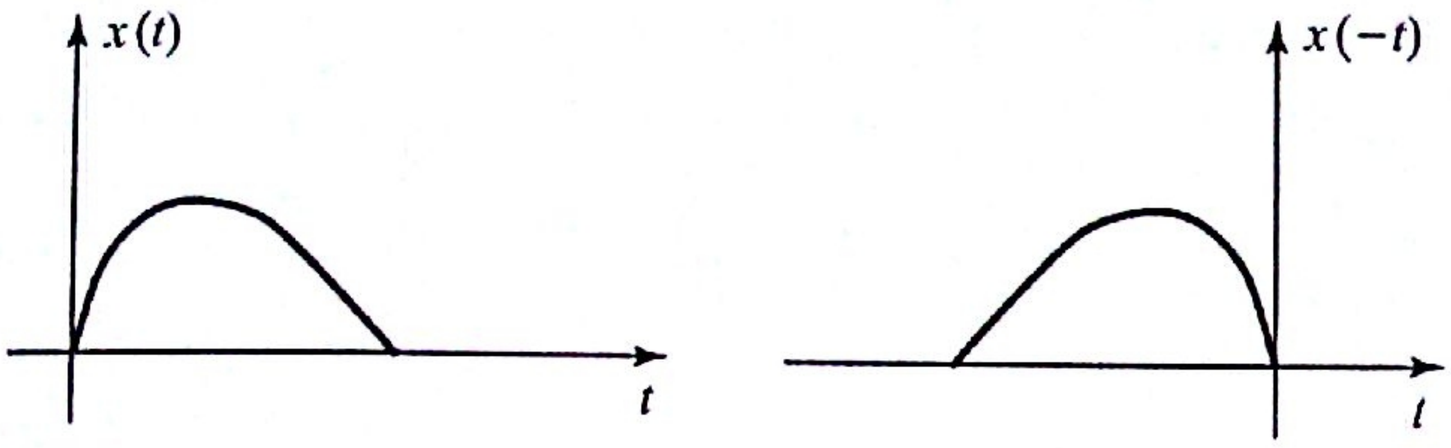
İşaretler üzerinde gerçekleştirilebilecek temel işlemler öteleme, zamanda-tersleme (çevirme) ve zaman-ölçekleme işlemleridir. Bu alt bölümde, bu işlemlerin işaret üzerindeki etkileri ele alınacaktır.

Zaman Öteleme. Bir $x(t)$ işaretini verilen sabit bir t_0 zamanı kadar öteleme, veya geciktirme, $x(t-t_0)$ şeklinde bir işaret üretir. Eğer t_0 pozitif ise, bu işlem t_0 kadar bir gecikme oluşturmaya eşittir ve dolayısı ile bu işlem sonucunda $x(t)$ işaretinin t_0 kadar sağa ötelenmiş bir versiyonu elde edilir. Eğer t_0 negatif ise, bu durumda sonuç $|t_0|$ kadar sola kaydırmaya eşittir. Bu işlem işareti $|t_0|$ kadar önceden tahmin etme anlamına gelir. Şekil 2.2 de t_0'ın pozitif değeri için ötelenmiş işaret verilmiştir.

Zamanda Tersleme. Bir işaretin zamanda terslenmesi veya çevrilmesi, işaretin düşey eksene göre çevrilmesi veya dikey eksene göre işaret gösteriminin ayna görüntüsünün alınması işlemidir. Zamanda tersleme işlemini bir müzik kasetinin geri sarılması işlemine benzetmemiz mümkündür.



Şekil 2.2 İşaretin ötelenmesi



Şekil 2.3 Bir işaretin zamanda terslenmesi

Sonuç olarak, pozitif zamana ait kısımlar negatif zamana eşlenirken negatif zamanlarda pozitif zaman eksenine eşlenir. Matematiksel olarak bir $x(t)$ işaretinin zamanda terslenmesi $x(-t)$ şeklinde ifade edilir. Şekil 2.3 bu işlemi görüntülemektedir.

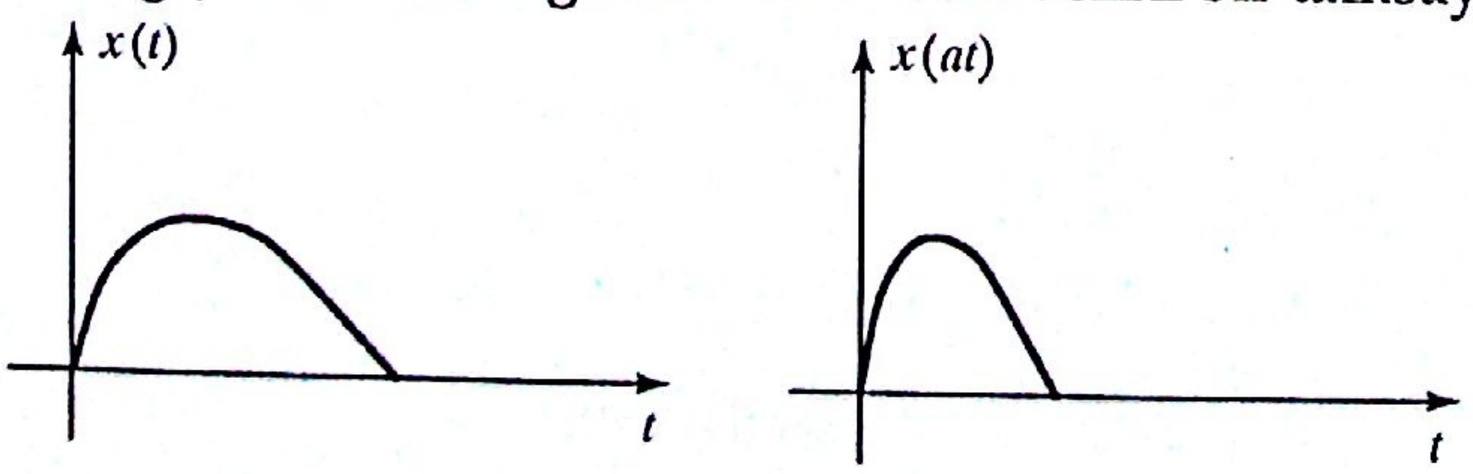
Zaman Ölçekleme. Bir işaretin zaman ölçeklenmesi işaretin gösteriminin yapıldığı zaman biriminde bir değişime neden olur. Zaman ölçekleme işaretin genleşmiş versiyonu (eğer yeni zaman birimi asıl zaman biriminin kesri ise) veya sıkıştırılmış versiyonunu (eğer yeni zaman birimi asıl zaman biriminin katı ise) üretir. Genel olarak zaman ölçekleme $x(at)$ şeklinde ifade edilir ve burada $a > 0$ dır. Eğer $a < 1$ ise, sonuç asıl işaretin genleştirilmesi ile sonuçlanacaktır. (Bu işleme, bir kasetin kayıt hızından daha yavaş bir hızla çalınması örnek olarak verilebilir.) Eğer $a > 1$ ise bu durumda sonuç asıl işaretin sıkıştırılmış versiyonu olacaktır. (Bu ise kasetin kayıt hızından daha hızlı bir hızda çalınmasına karşılık gelir.) $a > 1$ durumu için elde edilecek sonuç Şekil 2.4'de verilmiştir.

Genellikle bu işlemlerin bir kombinasyonu ile karşılaşırız. Örneğin, $x(-2t)$ işaretin terslenmesi ve 2 katsayı ile ölçeklenmesi işlemlerini içerir. Ayrıca $x(2t-3)$, işaretin 2 katsayısı ile ölçeklendirilip ve daha sonra sağa doğru 1.5 birim ötelenmesine denk olan $x[2(t-1.5)]$ işlemine eşittir.

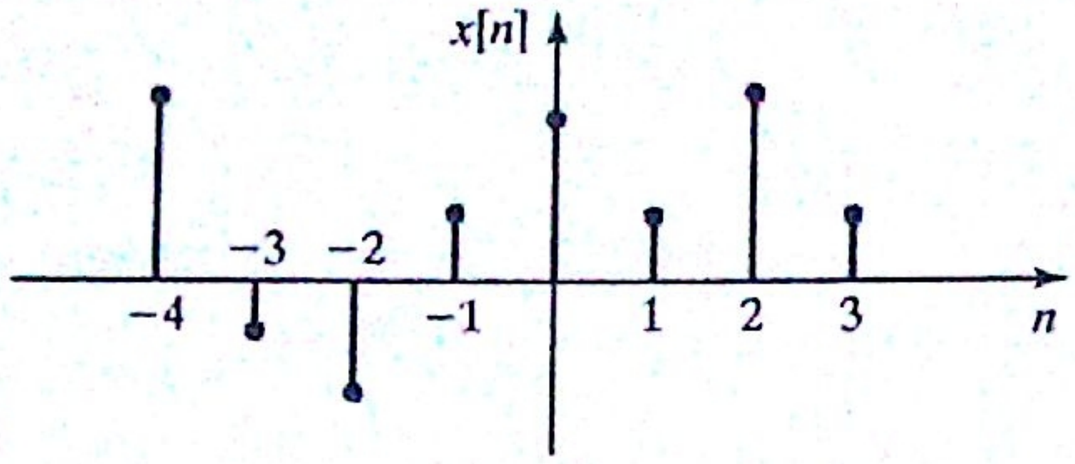
2.1.2 İşaretlerin Sınıflandırılması

İşaretlerin sınıflandırılması işaretler üzerinde yapılacak çalışmaları kolaylaştırır. Bakış açışına bağlı olarak, işaretler farklı şekillerde sınıflandırılabilir. Bu altbölümde işaretlerin en yaygın sınıflandırma şekilleri ele alınacaktır.

Sürekli Zamanlı ve Ayrık Zamanlı İşaretler. Bağımsız değişkenlerinin tanım aralığına bağlı olarak işaretler iki sınıfa ayrıştırılabilir: *sürekli zamanlı işaretler* ve *ayrık zamanlı işaretler*. *Sürekli zamanlı işaret* $x(t)$ bağımsız değişkeni t tüm gerçel sayı değerlerini alabilen bir işarettir. $x[n]$ şeklinde gösterilen *ayrık zamanlı işaret* bağımsız değişkeni n ise değer olarak sadece belirli bir tamsayı setinden değer alabilir.



Şekil 2.4. Bir işaretin zaman ölçeklemesi



Şekil 2.5. Ayrık zamanlı ve sürekli zamanlı işaret örnekleri

Sürekli zamanlı $x(t)$ işaretinin T_0 aralıklarında örneklenmesi ile ayrık zamanlı $x[n] = x(nT_0)$ işareti elde edilir. Şekil 2.5 ayrık zamanlı ve sürekli zamanlı iki işareti göstermektedir.

Örnek 2.1.1

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

olsun.

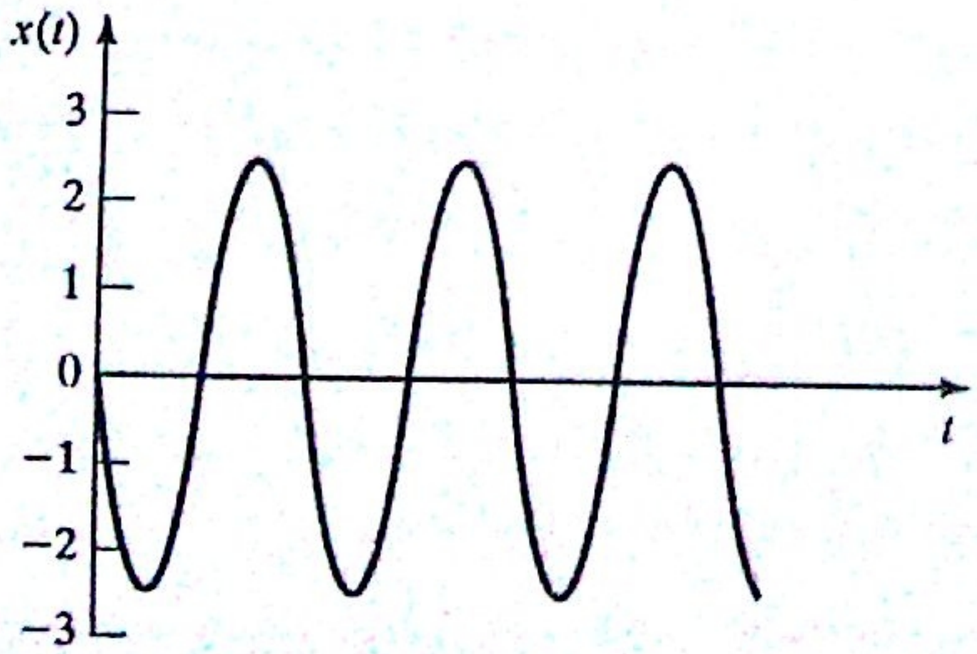
Bu *sinüzoidal* olarak adlandırılan sürekli zamanlı işarete örnek olarak verilebilir. Bu işaretin çizimi Şekil 2.6'da verilmiştir. ■

Örnek 2.1.2

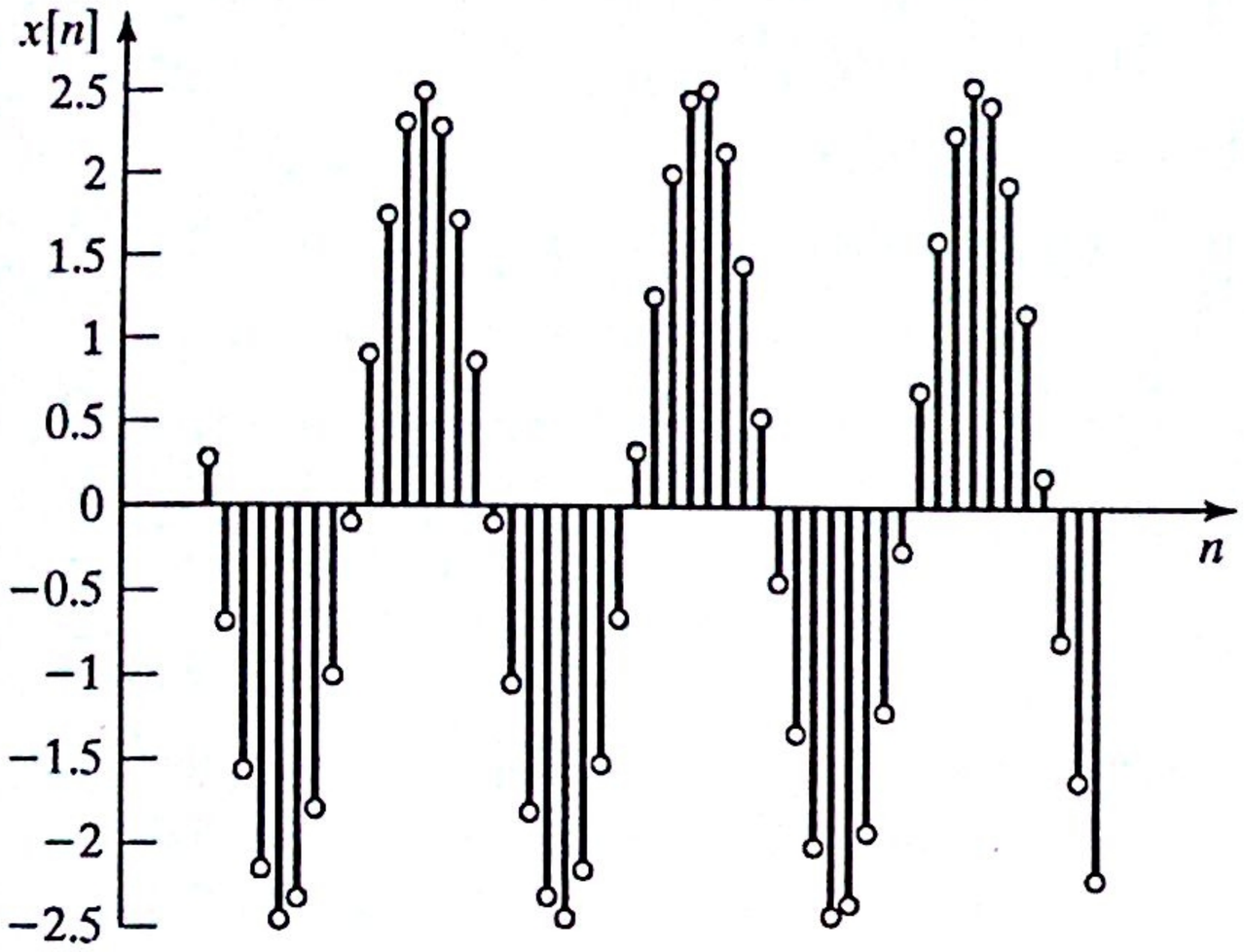
$$x[n] = A\cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

olsun.

Burada $n \in Z$ (Z tamsayılar kümesidir). Bu ayrık zamanlı işaretin çizimi Şekil 2.7'de verilmiştir. ■



Şekil 2.6. Sinüzoidal İşaret



Şekil 2.7. Ayrık zamanlı sinüzoidal işaret

Gerçel ve Karmaşık (Kompleks) İşaretler. İşaretler birer fonksiyondur ve fonksiyonlar bağımsız değişkenlerinin verilen değerinde sayısal değerler alır ve bu sayısal değerler gerçel veya karmaşık olabilir. *Gerçel İşaret* değerlerini, gerçel sayılar kümesinden alır; yani $x(t) \in R$ dir. *Karmaşık İşaretler* ise değerlerini karmaşık sayı kümesinden alır ve bundan dolayı $x(t) \in R'$dir.

Haberleşmede, karmaşık işaretler genellikle genlik ve faz bilgisini ileten işaretlerin modellemesinde kullanılır. Karmaşık sayılara benzer şekilde, karmaşık bir işaretler de iki gerçel işaret ile temsil edilebilir. Bu iki işaret karmaşık işaretin gerçel ve sanal bileşenlerini veya mutlak değerini (modül veya genlik) ve fazını ifade eder. Karmaşık işaretin grafiksel gösterimi de bu iki bileşenin grafikleri ile gerçekleştirilir.

Örnek 2.1.3

$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\theta)}$ işareti karmaşık bir işarettir. Bu işaretin gerçel bileşeni

$$x_r(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

ve sanal bileşeni ise

$$x_i(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

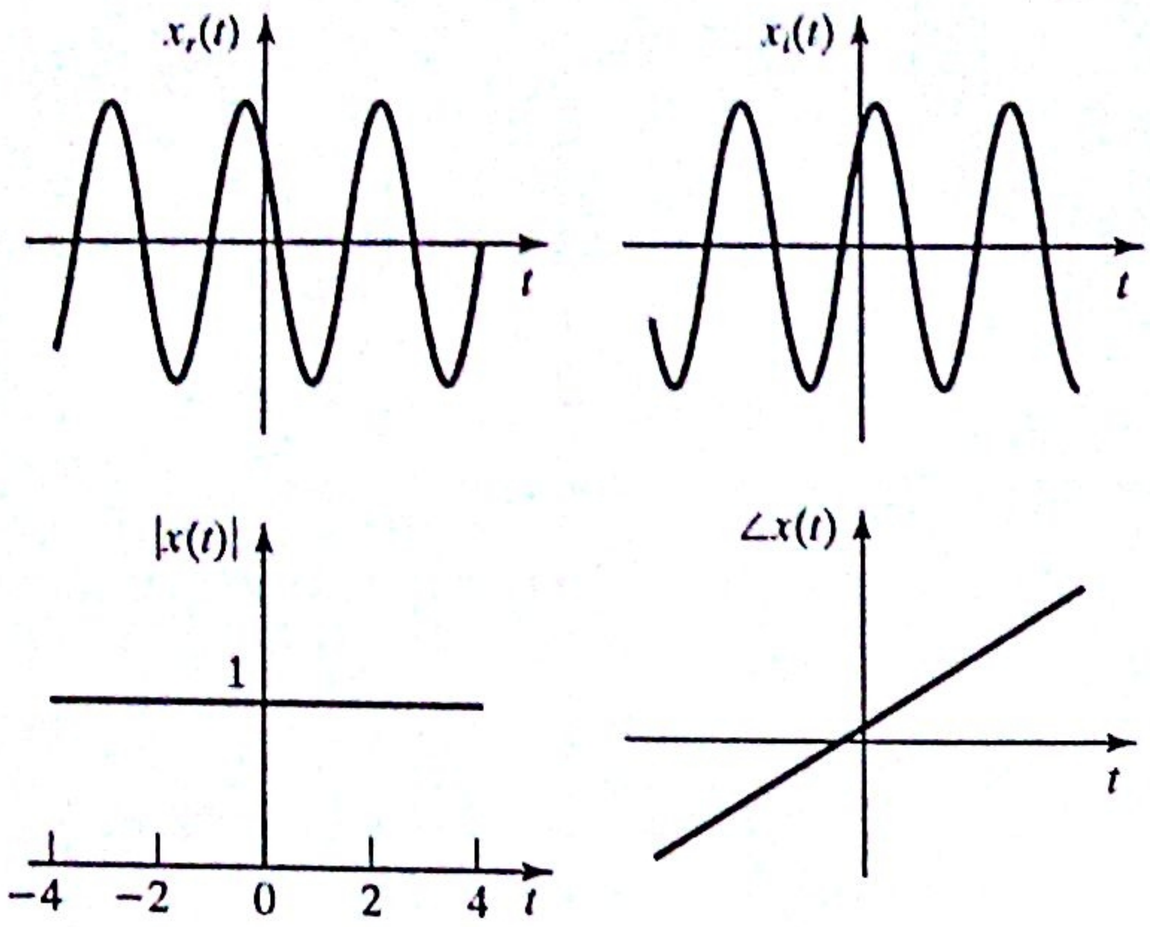
şeklinde ifade edilir. Yukarıdaki bu sonuçlar $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$ olarak verilen Euler eşitliği yardımı ile elde edilmiştir. Bu işareti alternatif bir şekilde işaretin modülü ve fazı cinsinden de ifade etmek mümkündür. $x(t)$'ın mutlak değeri

$$|x(t)| = \sqrt{x_r^2(t) + x_i^2(t)} = |A|$$

ve fazı

$$\angle x(t) = 2\pi f_0 t + \theta$$

olarak verilir. Şekil 2.8 bu fonksiyonların grafik gösterimini vermektedir.



Şekil 2.8. Örnek 2.1.3'de verilmiş olan karmaşık üstel (exponensiyel) işaretin Gerçek-Sanal ve Genlik-Faz gösterimi

Karmaşık bir işaretin gerçel ve sanal bileşenler ile, modül ve fazı aşağıda verilen ilişkiler kullanılarak verilir.

$$x_r(t) = |x(t)| \cos(\angle x(t)) \tag{2.1.1}$$

$$x_i(t) = |x(t)| \sin(\angle x(t)) \tag{2.1.2}$$

$$|x(t)| = \sqrt{x_r^2(t) + x_i^2(t)} \tag{2.1.3}$$

$$\angle x(t) = \arctan \frac{x_i(t)}{x_r(t)} \tag{2.1.4}$$

Deterministik ve Rastgele İşaretler. Deterministik işaretlerde herhangi bir t anında $x(t)$ işaretinin değeri gerçel veya sanal bir sayıdır. Rastgele (olasılıksal) işaret için verilen bir t anında $x(t)$ rastgele bir değişkendir (random variable); yani işaretin değeri bir olasılık yoğunluk fonksiyonu tarafından belirlenir.

Bu noktaya kadar örnek olarak incelediğimiz tüm işaretler deterministik işaretlerdir. Rastgele işaretler Bölüm 5'de ele alınacaktır.

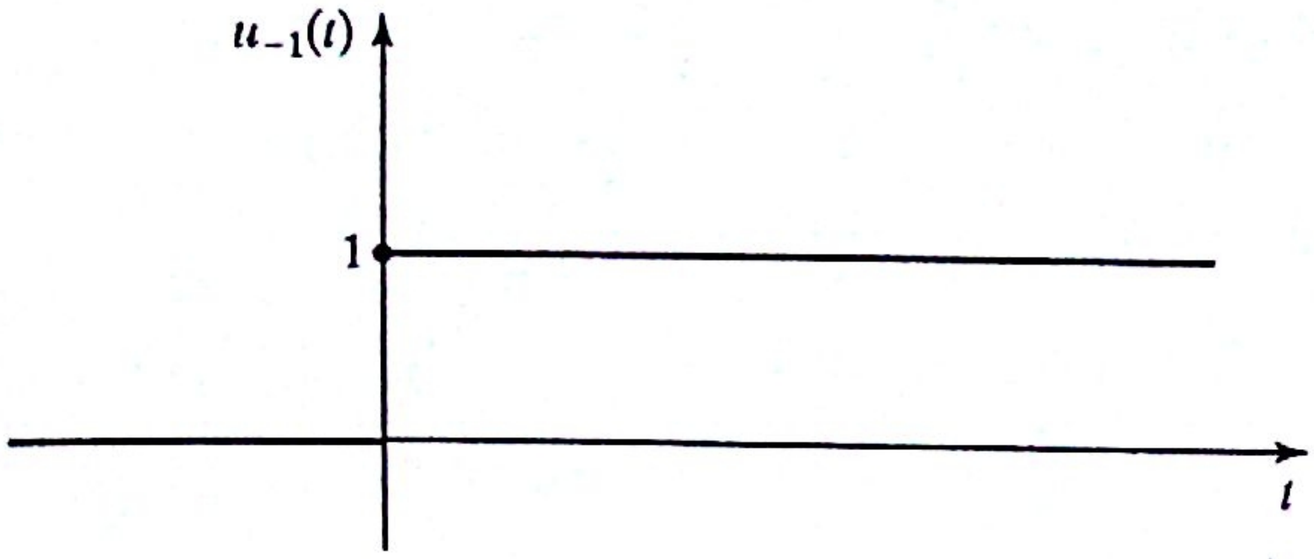
Periyodik veya Periyodik Olmayan İşaretler. Periyodik işaret zamanda kendini tekrar eder ve dolayısı ile bu işareti belirtmek için *periyot* olarak isimlendirilen temel aralık yeterlidir. Daha formal bir şekilde periyodik işaret, tüm t değerleri için, aşağıdaki özelliğe sahip olan işarettir.

$$x(t + T_0) = x(t)$$

Burada T_0 pozitif gerçel bir sayıdır (bu sayı işaretin *periyodu* olarak isimlendirilir). Ayrık zamanlı periyodik işaretler ise, tüm n tamsayıları için,

$$x[n + N_0] = x[n]$$

şeklinde verilir. N_0 pozitif tamsayıdır (ve işaretin *periyodu* olarak adlandırılır). Bu periyodiklik özelliğine sahip olmayan işaretler ise periyodik olmayan işaretler olarak adlandırılır.



Şekil 2.9 Birim basamak işareti

Örnek 2.1.4

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ ve $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\theta)}$ işaretleri gerçel ve karmaşık periyodik işaretlere örnek olarak verilebilir. Her iki işaretin periyodu $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$ dir. Şekil 2.9'da gösterilen

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.1.5}$$

birim basamak fonksiyonu ise periyodik olmayan işaretlere bir örnek olarak verilebilir.

Örnek 2.1.5

Şekil 2.7'de şekli verilmiş olan ayrık zamanlı sinüzoidal işaret f_0'nın tüm değerleri için periyodik değildir. İşaretin periyodik olması için

$$2\pi f_0(n + N_0) + \theta = 2\pi f_0 n + \theta + 2m\pi \tag{2.1.6}$$

şartının tüm n değerleri için sağlanması gerekir. Dolayısı ile

$$2\pi f_0 N_0 = 2\pi m$$

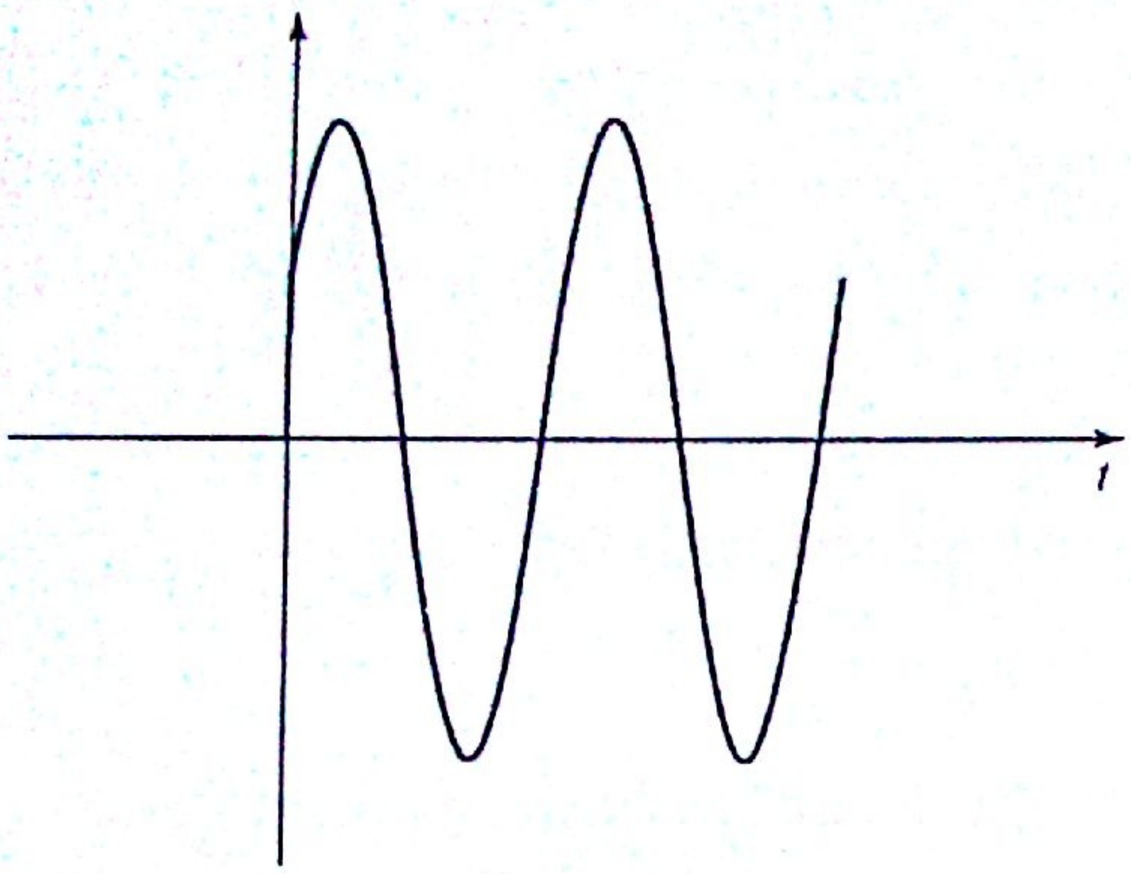
veya

$$f_0 = \frac{m}{N_0}$$

olmalıdır. Yani ayrık zamanlı bir işaretin periyodik olabilmesi için f_0 rasyonel bir sayı olmalıdır. Örneğin $A\cos(3\pi n + \theta)$ periyodik iken, $A\cos(\sqrt{2\pi} + n + \theta)$ işareti periyodik değildir.

Nedensel ve Nedensel Olmayan İşaretler. Nedensellik *sistemlerin* sınıflandırılmasında önemli bir kavramdır. Bu kavram sistemlerin gerçeklenebilirliği ile yakından ilişkilidir. Bu konu farklı sistemlerin incelendiği ilerleyen bölümlerde ele alınacaktır.

Nedensel işaret kavramı nedensel sistem kavramı ile yakın bir ilişkiye sahiptir. Bir $x(t)$ işareti tüm $t < 0$ için $x(t) = 0$ oluyor ise *nedensel* işaret olarak tanımlanır. Bu özelliği sağlamayan işaretler ise nedensel olmayan işaretlerdir. Benzer şekilde ayrık zamanlı bir işaret tüm $n < 0$ için sıfır değerini alıyor ise nedensel bir işarettir.



Şekil 2.10 Nedensel bir işaret örneği

Örnek 2.1.6.

$$x(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_0 t + \theta) & t \geq 0 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

işareti nedensel bir işarettir ve Şekil 2.10'da gösterimi yapılmıştır. ■

Benzer şekilde, zamanda terslendiğinde nedensel olan işaretler nedensel karşıtı (anti-causal) işaretler olarak adlandırılır. Dolayısı ile bu tür bir işaret $t > 0$ için sıfır değeri alır.

Çift ve Tek İşaretler. Çift oluş ve tek oluş işaretlerde mevcut olan farklı simetrileri tanımlamak için kullanılır. Bir $x(t)$ işareti eğer dik eksene göre ayna simetrisine sahip ise *çift* işarettir. Bir işaret orijine göre simetriye sahip ise bu işaret ise *tek* işarettir.

Bir işaret ancak ve ancak tüm t değerleri için

$$x(-t) = x(t)$$

ise bu işaret çift işarettir. Aynı şekilde tüm t değerleri için bir işaret

$$x(-t) = -x(t)$$

ise, bu işaret tek işarettir. Şekil 2.11 çift ve tek işaretleri göstermektedir.

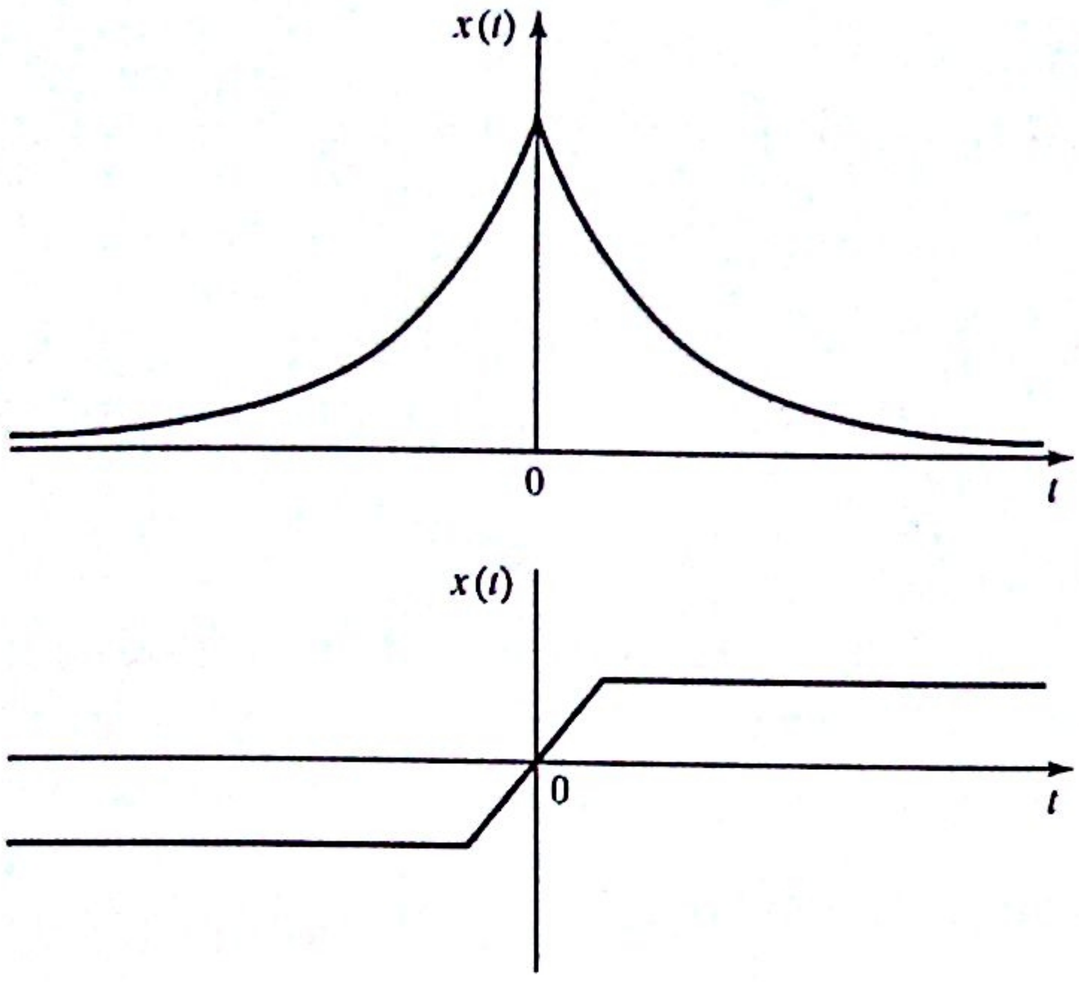
Genel olarak herhangi bir $x(t)$ işareti tek ve çift bileşenleri cinsinden aşağıda olduğu gibi yazılabilir.

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \tag{2.1.7}$$

burada

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \tag{2.1.8}$$

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \tag{2.1.9}$$



Şekil 2.11. Çift ve tek işaret örnekleri

Örnek 2.1.7

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ sinüzoidal işareti genellikle tek veya çift bir işaret değildir. Ancak $\theta = 0$ ve $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ değerleri için işaret sırası ile çift ve tek işaret özelliği gösterir. Genel olarak yukarıdaki işaret

$$x(t) = \frac{A}{2}\cos(\theta)\cos(2\pi f_0 t) - \frac{A}{2}\sin(\theta)\sin(2\pi f_0 t)$$

şeklinde yazılabilir. $\cos(2\pi f_0 t)$ çift ve $\sin(2\pi f_0 t)$ tek olduğu için

$$x_e(t) = \frac{A}{2}\cos(\theta)\cos(2\pi f_0 t)$$

ve

$$x_o(t) = -\frac{A}{2}\sin(\theta)\sin(2\pi f_0 t)$$

olduğu gösterilebilir.

Örnek 2.1.8

Şekil 2.8'den hareket ile $\theta = 0$ ve $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$ için gerçel bileşen ve genlik çift iken sanal bileşen ve faz tek simetriye sahiptir.

Karmaşık İşaretler için Hermitian Simetri. Karmaşık işaretler için, *Hermitian* simetri olarak adlandırılan simetrinin diğer bir formu da tanımlanmıştır. Bir karmaşık $x(t)$ işaretinin gerçel bileşeni çift ve sanal bileşeni tek ise bu işaret *Hermitian* işaret olarak adlandırılır.

Ayrıca Hermitian işaretlerin genliğinin çift ve fazının tek simetriye sahip olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$ işareti Hermitian işarete bir örnek verilebilir.

Enerji ve Güç İşaretleri. Bu sınıflandırma işaretlerin enerji ve güç içerikleri ile ilgilidir. Bu işaretleri sınıflandırmadan önce, güç ve enerji içeriğinin (veya kısaca güç ve enerjinin) tanımlanması gerekir.

Bir $x(t)$ işareti için, işaretin *enerji içeriği*[1]

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt \tag{2.1.10}$$

şeklinde tanımlanmıştır. *Güç içeriği* ise

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \tag{2.1.11}$$

Gerçel işaretler için $|x(t)|^2$ yerine doğrudan $x^2(t)$ alınabilir.

Bir işaret ancak ve ancak $\mathcal{E}_x$ değeri sonlu ise *enerji* işareti olarak adlandırılır. Benzer şekilde bir işaret ancak ve ancak P_x

$$0 < P_x < \infty$$

eşitsizliğini sağlıyor ise *güç* işareti olarak sınıflandırılır.

Örnek 2.1.9

$$x(t) = \begin{cases} 3 & |x| < 3 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olan işaretin enerjisini bulun.

Çözüm

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-3}^{3} 9\, dt = 54$$

olarak bulunur. Dolayısı ile bu işaret enerji işaretidir. ■

Örnek 2.1.10

$A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ işaretinin enerjisi

$$\mathcal{E}_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta)\, dt = \infty$$

olarak bulunur. Dolayısı ile bu işaret bir enerji işareti değildir. Ancak, işaretin gücü

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta)\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A^2}{2} \left[1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta)\right] dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left[\frac{A^2 T}{2T} + \left[\frac{A^2}{8\pi f_0 T} \sin(4\pi f_0 t + 2\theta) \right]_{-T/2}^{T/2} \right]$$

$$= \frac{A^2}{2} < \infty \tag{2.1.12}$$

olduğundan $x(t)$ bir güç işaretidir ve gücü $\frac{A^2}{2}$ dir. ■

---

[1] Eğer x(t) 1 Ω'luk bir direnç üzerinde düşen gerilim ise, bu direnç üzerinden geçen akım $x(t)$ olacaktır ve ani güç $x^2(t)$ olur. Dolayısı ile (2.1.10) denklemi enerjinin gücün integrali olacağı gerçeği göz önüne alınarak yorumlanabilir.

Örnek 2.1.11

T_0 periyoduna sahip herhangi bir periyodik işaretin enerjisi

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x &= \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{nT_0}{2}}^{+\frac{nT_0}{2}}|x(t)|^2dt\\ &= \lim_{n\to\infty} n\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}}|x(t)|^2dt\\ &= \infty \qquad (2.1.13)\end{aligned}$$

Dolayısı ile *periyodik işaretler enerji işareti değildir.* Periyodik işaretin güç içeriği

$$\begin{aligned}P_x &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT_0}\int_{-\frac{nT_0}{2}}^{+\frac{nT_0}{2}}|x(t)|^2dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{nT_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}}|x(t)|^2dt\\ &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}}|x(t)|^2dt \qquad (2.1.14)\end{aligned}$$

olarak verilir. Bu sonucun anlamı herhangi bir periyodik işaretin güç içeriğinin, bir periyot içindeki ortalama güce eşit olduğudur.

2.1.3 Bazı Önemli İşaretler ve Özellikleri

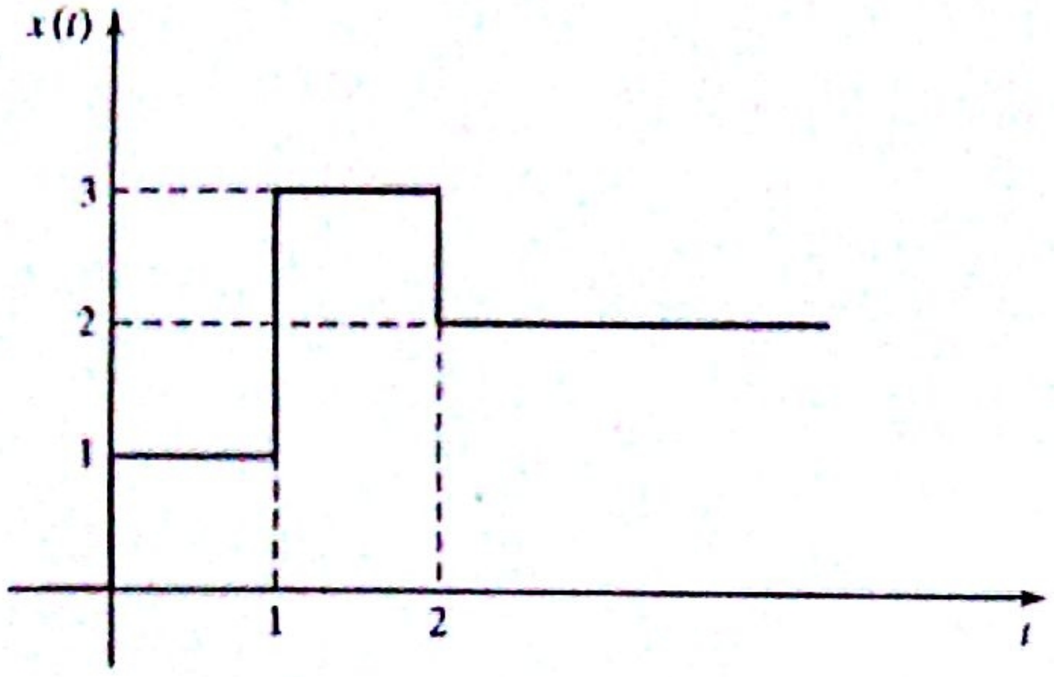
Haberleşme sistemlerinin incelenmesinde belirli işaretler sıklık ile kullanılır. Bu altbölümde bu işaretlerin bazıları kısaca tanıtılacak ve özellikleri tanımlanacaktır.

Sinüzoidal İşaret. Sinüzoidal işaret

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

şeklinde tanımlanır. Burada A, f_0 ve θ sırası ile işaretin *genlik, frekans* ve *faz* bilgisidir. Bir sinüzoidal işaret $T_0 = 1/f_0$ periyodu ile periyodiktir. Bu işaretin gösterimi için Şekil 2.6'a bakınız.

Karmaşık Üstel İşaret. Karmaşık üstel işaret $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\theta)}$ olarak tanımlanmıştır. Burada aynı şekilde A, f_0 ve θ sırası ile işaretin *genlik, frekans* ve *faz* bilgisidir. Bu işaret Şekil 2.8'de gösterilmiştir.



Şekil 2.12. $u_{-1}(t)+2u_{-1}(t-1)-u_{-1}(t-2)$ işareti

Birim Basamak İşareti. Birim basamak altbölüm 2.1.2'de tanımlanmıştır ve sıklık ile kullanılan bir işarettir. Birim basamak herhangi bir işaret ile çarpıldığında sonuç işaretin "nedensel versiyonu"dur. Bu işaret Şekil 2.9'da gösterilmiştir. a pozitif olmak kaydı ile bu işaret için $u_{-1}(at)=u_{-1}(t)$ yazılabilir. (Yani zamanda ölçekleme işlemi bu işareti değiştirmez.) ■

Örnek 2.1.12.

$u_{-1}(t)+2u_{-1}(t-1)-u_{-1}(t-2)$ işaretinin grafiğini çizmek için bu işaretin birim basamak fonksiyonunun ötelenmesi ile elde edilebileceği gerçeği kullanılabilir. Bu işaretin grafiği Şekil 2.12'de verilmiştir.

Dikdörtgen Darbe. Bu işaret

$$\Pi(t)=\begin{cases}1 & -\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2}\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases} \qquad (2.1.15)$$

şeklinde tanımlanmıştır. İşaretin grafiği Şekil 2.13'de verilmiştir.

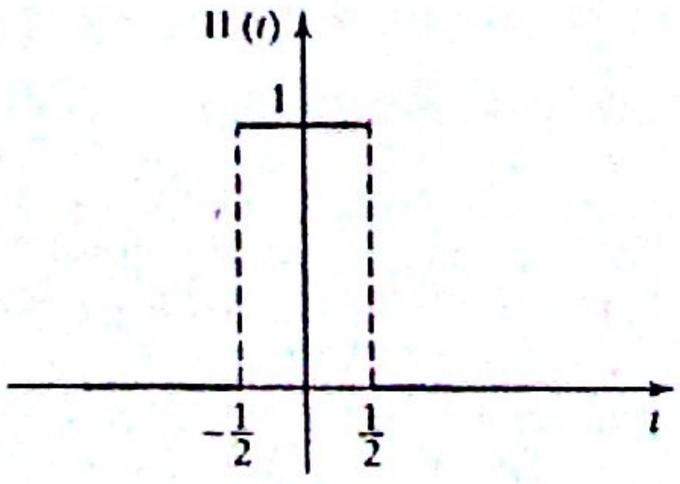
Örnek 2.1.13

$2\Pi(\frac{t-3}{6})-\Pi(\frac{t-3}{4})$ işaretinin grafiğini elde etmek için, bu işaretin zamanda ötelenmiş ve ölçeklenmiş iki dikdörtgen darbe işaretinin farkı olduğuna dikkat edilmelidir. Bu işaretin grafiği Şekil 2.14 de verilmiştir. ■

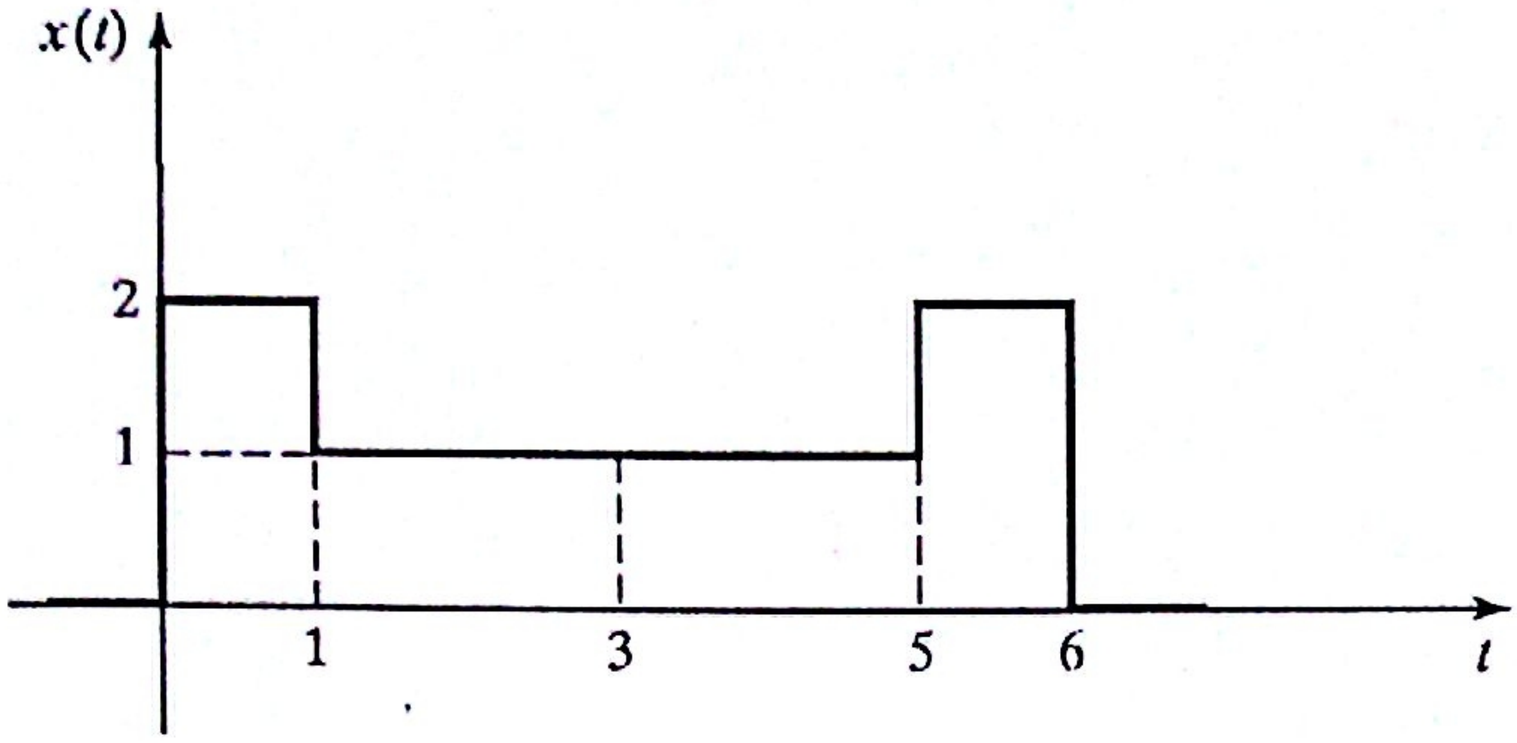
Üçgen İşaret. Bu işaret

$$\Lambda(t)=\begin{cases}t+1 & -1\le t\le 0\\ -t+1 & 0\le t\le 1\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases} \qquad (2.1.16)$$

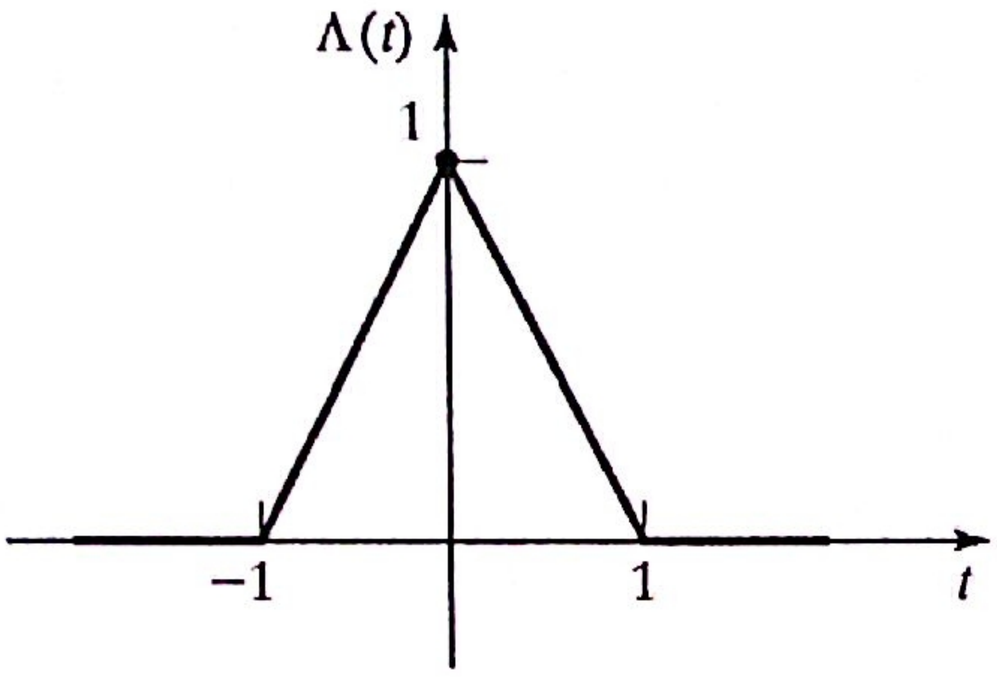
şeklinde tanımlanmıştır.



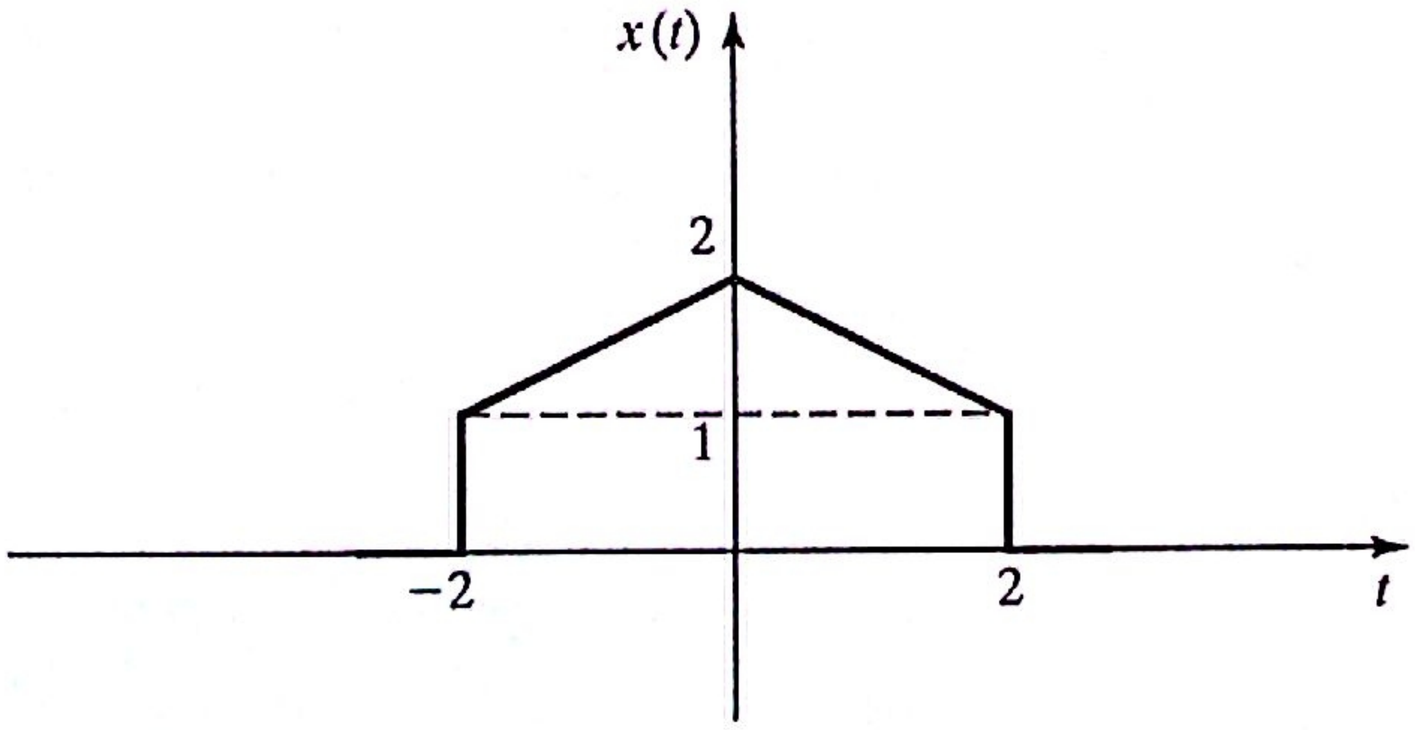
Şekil 2.13. Dikdörtgen darbe



Şekil 2.14 $2\Pi(\frac{t-3}{6}) - \Pi(\frac{t-3}{4})$ işareti



Şekil 2.15 Üçgen işaret



Şekil 2.16 $\Pi(\frac{t}{4}) + \Lambda(\frac{t}{2})$ işareti

Üçgen işaretin grafiği Şekil 2.15'te verilmiştir. Aşağıdaki eşitliği ispatlamak zor değildir.[2]

$$\Lambda(t) = \Pi(t) \star \Pi(t) \tag{2.1.17}$$

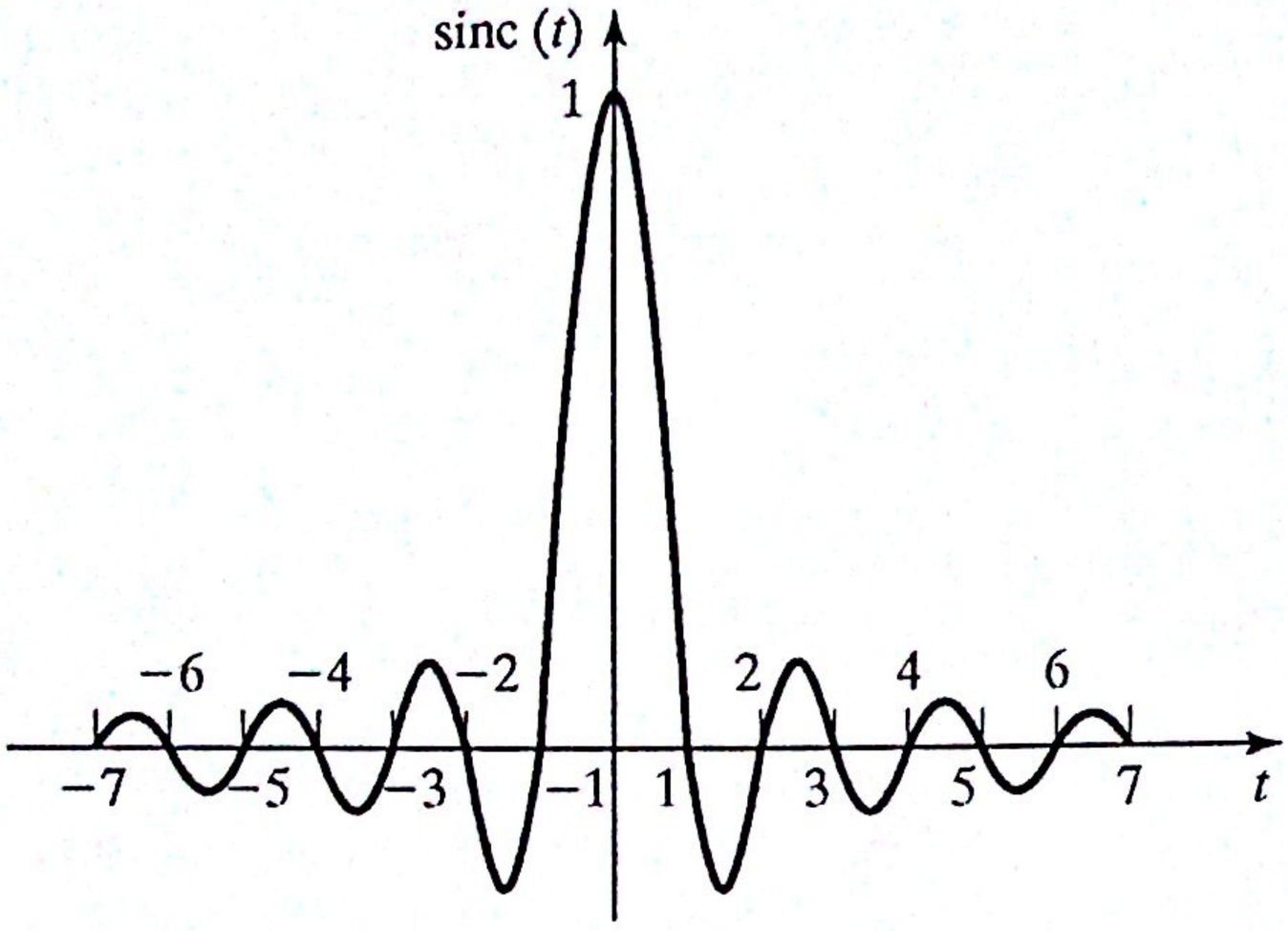
Örnek 2.1.14. $\Pi(\frac{t}{4}) + \Lambda(\frac{t}{2})$ işaretini çizebilmek için işaret üzerinde zaman ölçekleme uygulayalım. Elde edilen sonuç Şekil 2.16'da gösterilmiştir.

---

[2] Bu ifade iki işaretin evrişimini (konvolüsyonunu) temsil eder ve evrişim

$$x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) y(\tau)\, d\tau = y(t) \star x(t).$$

şeklinde tanımlanmıştır. Daha fazla bilgi için altbölüm 2.15'e göz atın.



Şekil 2.17 Sinc işareti

Sinc İşareti. Sinc işareti

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases} \tag{2.1.18}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu işaretin dalgaformu Şekil 2.17'de verilmiştir. Bu şekilden, sinc işaretinin maksimumu olan 1 değerini $t = 0$'da aldığı gözükmektedir. Bu işaretin sıfırları ise $t = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ noktalarında elde edilmektedir.

Sign veya Signum İşareti. Sign veya signum işareti, bağımsız değişkenin işaretini gösterir ve

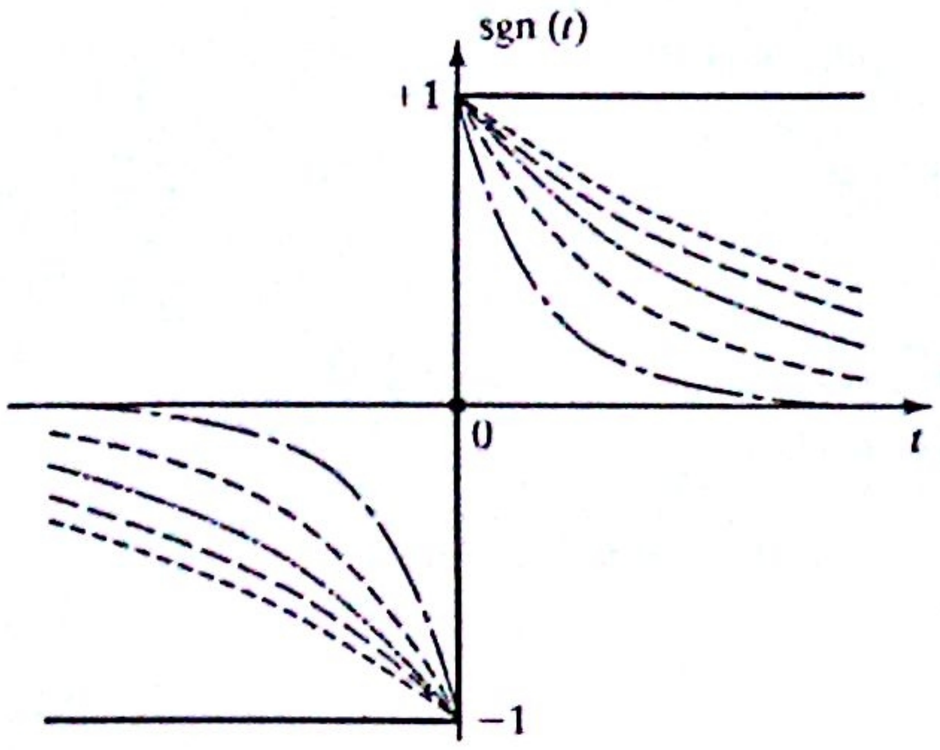
$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \tag{2.1.19}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu işaret Şekil 2.18'de gösterilmektedir. Signum işareti

$$x_n(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{n}} & t > 0 \\ -e^{\frac{t}{n}} & t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \tag{2.1.20}$$

şeklinde tanımlanmış olan $x(n)$ işaretinin $n \to \infty$ gider iken limiti olarak görülebilir. Bu limit davranışı Şekil 2.18'de gösterilmiştir.

Dürtü veya Delta İşareti. Dürtü veya delta işareti ölçü aletlerinin çözünürlüğünün dışında kalan oldukça küçük bir zaman diliminde gerçekleşen ve bundan dolayı pratikte zaman diliminin sıfıra eşit olduğu kabul edilen fiziksel olayları tanımlamak için kullanılan matematiksel bir modeldir. Bu tür olaylara oldukça dar gerilim veya akım darbesi vb. örnek olarak verilebilir. Matematiksel anlamda, dürtü işareti $\delta(t)$ bir fonksiyon (veya işaret) değildir. Bir *dağılım* veya *genelleştirilmiş bir fonksiyondur.*



Şekil 2.18. $x_n(t)$ işaretinin limiti olarak signum işareti

Bir *dağılım,* entegral altında bir başka fonksiyon (Bu fonksiyon "test fonksiyonu" olarak adlandırılır.) üzerindeki etkisi göz önüne alınarak tanımlanır. Dürtü dağılımı (veya işareti), $\phi(t)$ test fonksiyonu üzerinde dürtü dağılımının etkisini ifade eden aşağıdaki

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t)\,dt = \phi(0) \tag{2.1.21}$$

ilişkisi ile tanımlanır. Test fonksiyonu orijinde süreklilik gösteren bir fonksiyondur. Dürtü fonksiyonunun bu özelliği *eleme özelliği* olarak adlandırılır. Diğer bir deyiş ile dürtü fonksiyonunun entegral altındaki "test fonksiyonu" üzerindeki etkisi fonksiyonun orijindeki değerinin alınması veya *elenmesi* olarak görülebilir. Gösterildiği gibi $\delta(t)$, test fonksiyonu $\phi(t)$ üzerindeki etkisi yardımı ile tanımlanmaktadır; yani farklı t değerleri için kendi alacağı değerler cinsinden tanımı yapılmamaktadır.

Bazen $\delta(t)$ 'in bazı bilinen işaretlerin limit durumu olarak düşünülmesi faydalı olmaktadır. Bu amaçla en sık kullanılan form

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \Pi\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \tag{2.1.22}$$

veya

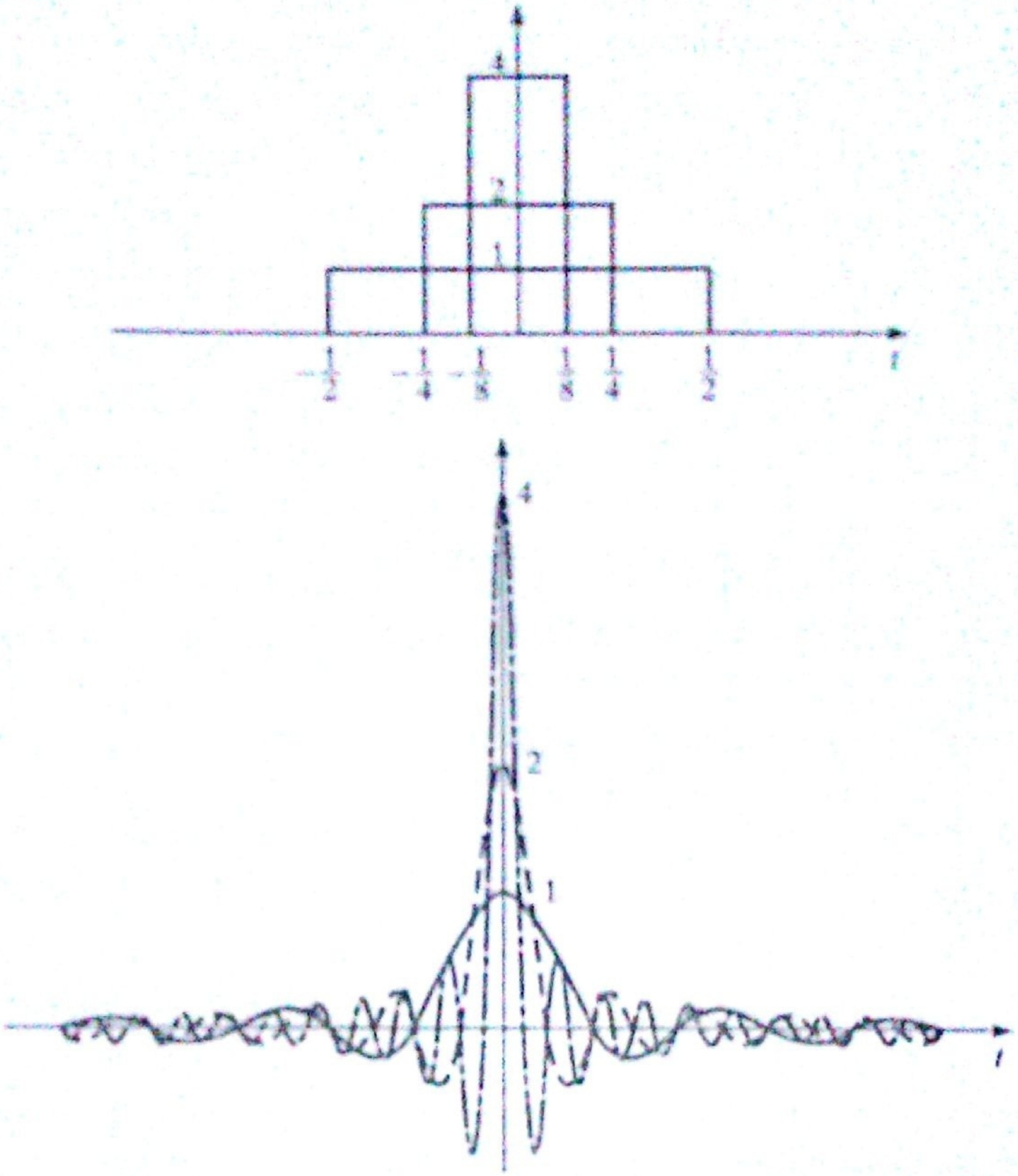
$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \text{sinc}\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \tag{2.1.23}$$

olarak verilmektedir. Şekil 2.19 bu işaretlerin grafiğini göstermektedir. (Burada $\epsilon \downarrow 0$ simgesi ϵ yukarıdan sıfıra yaklaşmaktadır anlamına gelir; yani bu değer her zaman pozitif kalır).

Aşağıdaki özellikler dürtü işaretinin tanımından hareket ile elde edilen özelliklerdir.

1. Tüm $t \neq 0$ değerleri için $\delta(t) = 0$ ve $\delta(0) = \infty$
2. $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$
3. $\phi(t)$ fonksiyonu t_0 noktasında sürekli ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t - t_0)\,dt = \phi(t_0) \tag{2.1.24}$$



Şekil 2.19 Farklı işaretlerin limit durumu olarak dürtü işareti

4. t_0 noktasında sürekli olan herhangi $\phi(t)$ fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t + t_0)\delta(t)\,dt = \phi(t_0) \tag{2.1.25}$$

5. $a \neq 0$ için

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{2.1.26}$$

6. Herhangi bir fonksiyon ile dürtü fonksiyonunun evrişimi fonksiyonun kendisidir yani;

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \tag{2.1.27}$$

Ayrıca

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \tag{2.1.28}$$

7. Birim basamak işareti, dürtü işaretinin entegralidir ve dürtü işareti birim basamak işaretinin *genelleştirilmiş türevi* olarak verilebilir. Yani

$$u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \tag{2.1.29}$$

ve

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u_{-1}(t) \tag{2.1.30}$$

8. $\delta(t)$'nin tanımlanmasına benzer bir şekilde, bu işaretin *genelleştirilmiş türevleri* $\delta'(t), \delta''(t), \ldots, \delta^{(n)}(t)$ aşağıdaki denklemler yardımı ile tanımlanır.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t)\phi(t)\, dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\phi(t)\Big|_{t=0} \tag{2.1.31}$$

Bu ifade genelleştirilir ise

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t - t_0)\phi(t)\, dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\phi(t)\Big|_{t=t_0} \tag{2.1.32}$$

elde edilir.

9. Herhangi bir $x(t)$ işaretin $\delta(t)$'nin n.inci türevi ile evrişimi, işaretin n.inci türevine eşittir. Yani

$$x(t) \star \delta^{(n)}(t) = x^{(n)}(t) \tag{2.1.33}$$

ve örneklendirilir ise

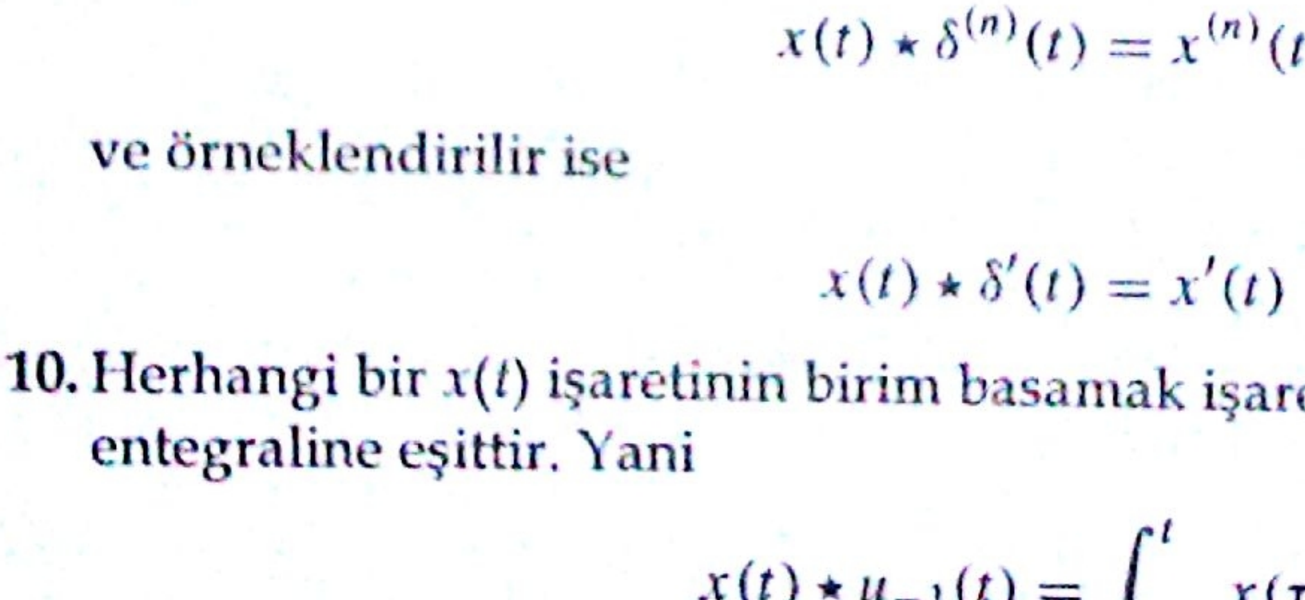
$$x(t) \star \delta'(t) = x'(t) \tag{2.1.34}$$

10. Herhangi bir $x(t)$ işaretinin birim basamak işareti ile entegrali $x(t)$ işaretinin entegraline eşittir. Yani

$$x(t) \star u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \tag{2.1.35}$$

11. n'in çift değerleri için, $\delta^{(n)}(t)$ çift fonksiyon iken, n'in tek değerleri için tek fonksiyondur. Dolayısı ile $\delta(t)$ çift iken $\delta'(t)$ tek fonksiyondur.

Dürtü işaretinin grafiksel gösterimi Şekil 2.20'de verilmiştir.



Şekil 2.20. Dürtü İşareti

Örnek 2.1.15

$(\cos t)\delta(t), (\cos t)\delta(2t-3)$ ve $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta'(t-1)\,dt$ ifadelerinin değerlerini belirleyin

Çözüm $(\cos t)\delta(t)$ belirlemek için Özellik 2 kullanılır ise

$$(\cos t)\delta(t) = (\cos 0)\delta(t) = \delta(t)$$

$(\cos t)\delta(2t-3)$ belirlemek için Özellik 3 kullanılır ise

$$\delta(2t-3) = \frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$$

ve Özellik 1'den hareket ile

$$(\cos t)\delta(2t-3) = \frac{1}{2}(\cos t)\delta\left(t-\frac{3}{2}\right) = \frac{\cos 1.5}{2}\delta\left(t-\frac{3}{2}\right) \approx 0.035\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$$

Son olarak özellik 8 kullanılarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta'(t-1)\,dt = (-1)\frac{d}{dt}e^{-t}\Big|_{t=1} = e^{-1}$$ ■

elde edilir.

2.1.4 Sistemlerin Sınıflandırılması

Sistem farklı eleman ve araçların birbirleri ile birleştirilmesinden oluşan ve bir bütün gibi davranan yapılardır. Haberleşme açışından bakıldığında, sistem bir *giriş işareti* tarafından uyarıldığında, çıkışında bir *çıkış işareti* üreten yapıdır. Haberleşme mühendisi gözünde ise sistem bir giriş işareti için bir çıkış işareti atayan bir kural, kanundur. Örneğin, giriş işareti olarak bir gerilim değerini ve çıkış olarak belirli bir koldaki akımı alan elektrik devresi bir sistemdir. Bu tanımlamadaki en önemli husus sistemin *geçerli bir giriş için tekil olarak belirli bir çıkışı tanımlamasıdır.* Bu tanım matematiksel olarak

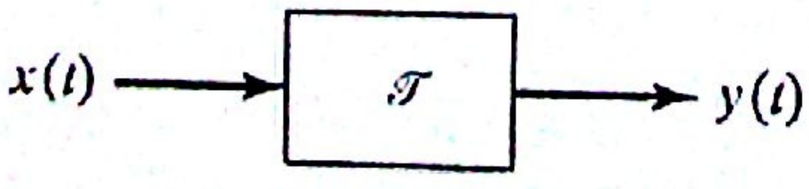
$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] \tag{2.1.36}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $x(t)$ giriş, $y(t)$ çıkış ve $\mathcal{T}$ sistem tarafından gerçekleştirilen işlemdir. Şekil 2.21 bir sistemin görsel olarak gösterimini yapmaktadır.

Örnek 2.1.16.

$y(t) = 3x(t) + 3x^2(t)$ giriş-çıkış ifadesi bir sistemi tanımlar. Herhangi bir $x(t)$ girişi için $y(t)$ tekil olarak belirlenir.

Bir sistem iki karakteristiğe sahiptir: 1) Sistemi tanımlayan işlem 2) geçerli giriş işaret seti. Bu kitapta operatör $\mathcal{T}$ sistemi tanımlayan işlem olarak kullanılacaktır. $\mathcal{X}$ ise sisteme giriş olarak verilen geçerli giriş uzayı için kullanılacaktır.



Şekil 2.21. Giriş ve çıkışı gösterilmiş olan bir sistem

Örnek 2.1.17

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = \frac{d}{dt}x(t) \tag{2.1.37}$$

giriş-çıkış ifadesi ile tanımlanmış olan sistem için $\mathcal{X}$ tüm türevi alınabilir işaretlerdir. Bu sistem *türev alıcı* sistem olarak ifade edilir. ■

$\mathcal{X}$ uzayı genellikle sistem işlevi tarafından tanımlanır; bundan dolayı genellikle açık bir şekilde ifade edilmez. Sistemler, işaretler gibi, özelliklerine göre sınıflandırılabilirler. Bu bakış açısından hareket ile farklı sınıflandırmalar mümkündür. Aşağıda kısaca temel sistem sınıflandırmaları verilecektir.

Ayrık Zamanlı ve Sürekli Zamanlı Sistemler. Sistemler giriş işaretine karşılık çıkış işareti üretmek için kullanılan işlemlere göre sınıflandırılırlar. Sistemler ayrık zamanlı veya sürekli zamanlı işaretleri giriş ve çıkış işaretleri olarak kabul edebilirler ve bu sistemin sürekli zamanlı veya ayrık zamanlı olarak sınıflandırılmasının temelini oluşturur.

Ayrık zamanlı sistemler ayrık zamanlı işaretleri giriş olarak kabul eder ve çıkışlarında ayrık zamanlı işaretler üretirler. *Sürekli zamanlı sistemler* için ise hem giriş ve hem çıkış işaretleri sürekli zamanlı işaretlerdir.

Örnek 2.1.18.

Son olarak verilen iki örnekte kullanılan işaretler sürekli zamanlı sistemlerdir. Ayrık zamanlı bir sistem ise

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \tag{2.1.38}$$

ile tanımlanan sistemdir. Bu sistem ayrık zamanlı *türev alıcıdır.* ■

Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Sistemler. Doğrusal sistemler *süperpozisyon* özelliği taşıyan yani sistemin giriş işaretlerinin doğrusal kombinasyonuna verdiği tepki (sistem çıkışı) herbir giriş işareti için verilen tepkilerin doğrusal kombinasyonudur.

Bir $\mathcal{T}$ sistemi, ancak ve ancak $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ giriş işaretleri ve α ve β gibi iki skalar için

$$\mathcal{T}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha \mathcal{T}[x_1(t)] + \beta \mathcal{T}[x_2(t)] \tag{2.1.39}$$

ise doğrusaldır. Bu özelliği karşılamayan herhangi bir sistem *doğrusal olmayan sistem* olarak adlandırılır.

Doğrusallık ayrıca aşağıdaki özellikler yardımı ile tanımlanır.

$$\begin{cases} \mathcal{T}[x_1(t) + x_2(t)] & = \mathcal{T}[x_1(t)] + \mathcal{T}[x_2(t)] \\ \mathcal{T}[\alpha x(t)] & = \alpha \mathcal{T}[x(t)] \end{cases} \tag{2.1.40}$$

İlk özelliği sağlayan sistemler *toplanır* sistem olarak isimlendirilir iken ikinci özelliği sağlayan sistemler ise *homojen (tektürel)* sistemler olarak tanımlanır. İkinci özellikten,

doğrusal sistemlerde $\mathcal{T}[0] = 0$ olduğu yani doğrusal bir sistemin sıfır giriş için herzaman sıfır çıkış üreteceği görülür (bu doğrusallık için gerekli fakat yeterli olmayan bir koşuldur).

Doğrusallık oldukça önemli bir özelliktir. Doğrusal sistemlerde giriş işareti, basit temel işaretlerin doğrusal kombinasyonu olarak ifade edilebilir ve böylece sistem çıkışı, bu temel işaretler için çıkışların doğrusal kombinasyonu olarak kolaylıkla belirlenebilir. Bu kitap boyunca doğrusal sistemler $\mathcal{T}$ gösterimi yerine $\mathcal{L}$ ile ifade edilecektir.

Örnek 2.1.19

Yukarıda tanımlanmış olan *türev alıcı* doğrusal sistemlere bir örnektir. $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ türevi alınabilir ise α ve β değerleri için $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ de türevi alınabilir olmalıdır ve

$$\frac{d}{dt}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha x_1'(t) + \beta x_2'(t)$$

$y(t) = \alpha x^2(t)$ ifadesi ile tanımlanan sistem ise doğrusal olmayan sistemdir. Çünkü bu sistemin $2x(t)$ girişine tepkisi

$$\mathcal{T}[2x(t)] = 4x^2(t) \neq 2x^2(t) = 2\mathcal{T}[x(t)]$$

şeklindedir. Dolayısı ile sistem homojen (tektürel) değildir. ■

Örnek 2.1.20

Geciktirme sistemi $y(t) = x(t - \Delta)$ şeklinde tanımlanmıştır. Yani sistem çıkışı sistem girişinin geciktirilmiş versiyonudur. (Şekil 2.22' e bakınız). Eğer $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ ise sistemin çıkışı $\alpha x_1(t - \Delta) + \beta x_2(t - \Delta)$ olacaktır. Dolayısı ile sistem doğrusaldır. ■

Zamanla Değişmeyen ve Zamanla Değişen Sistemler. Eğer bir sistemin giriş-çıkış ilişkisi zamanla değişmiyor ise bu sistem zamanla-değişmeyen sistemdir. Bunun anlamı giriş işaretinin gecikmiş versiyonu için sistem çıkışı çıkış işaretinin gecikmiş versiyonu olmalıdır.

Bir sistem ancak ve ancak, tüm $x(t)$ ve tüm t_0 değerleri için, $x(t - t_0)$ için sistem tepkisi $y(t - t_0)$ ise *zamanla değişmeyen* bir sistemdir. Burada $y(t)$, sistemin $x(t)$ için üretmiş olduğu tepkisidir. (Şekil 2.23'e bakınız)

Örnek 2.1.21.

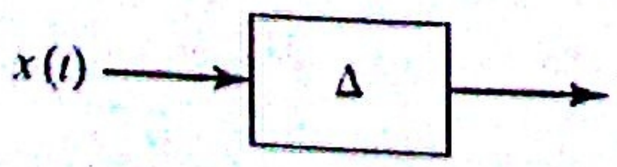
Türev alıcı zamanla değişmeyen bir sistemdir. Çünkü

$$\frac{d}{dt}x(t - t_0) = x'(t)\Big|_{t=t-t_0}$$

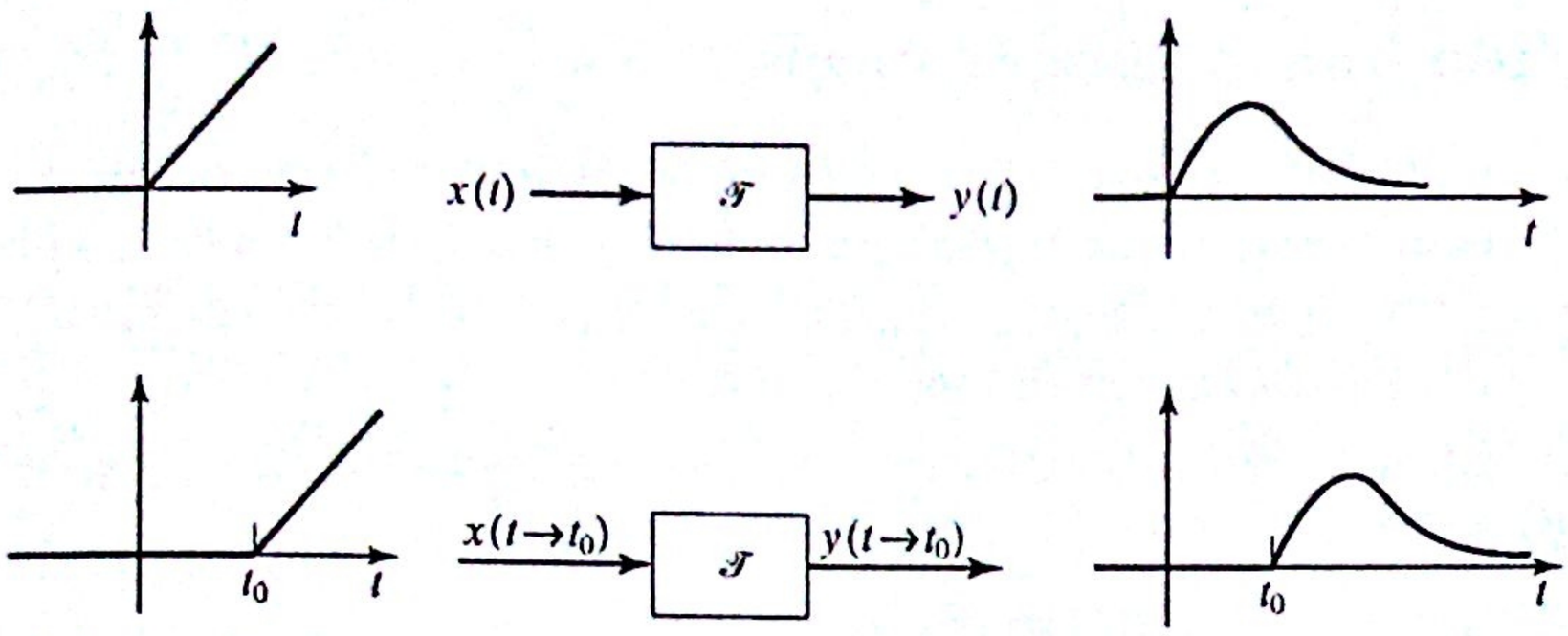
olmaktadır. ■

Örnek 2.1.22.

$y(t) = x(t)\cos 2\pi f_0 t$, şeklinde tanımlanmış olan bir modülatör zamanla değişen sisteme örnek olarak verilebilir. Bu sistemin $x(t - t_0)$ girişi için vereceği tepki: $x(t - t_0)\cos(2\pi f_0 t)$, olur ki bu $y(t - t_0)$ tepkisine eşit değildir.



Şekil. 2.22 Geciktirme sistemi için giriş-çıkış ilişkisi



Şekil 2.23 Zamanla değişmeyen sistem

Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD) sistem kümesi bazı nedenlerden dolayı özellikle önemlidir. Bu sistemlerin girişlerine gösterdikleri tepki, basit bir şekilde giriş işareti ile sistemin birim dürtü tepkisinin evrişimi (konvolüsyonu) olarak elde edilebilir. Sistemin bu özelliğini Altbölüm 2.1.5'de ayrıntılı olarak ele alacağız.

Nedensel ve Nedensel Olmayan Sistemler. Nedensellik sistemlerin fiziksel olarak gerçekleştirilebilirliği ile ilgilidir. Hiçbir fiziksel sistem, girişinin gelecek bir zaman diliminde ne olacağını bilemeyeceğinden, fiziksel olarak gerçekleştirilebilir sistem çıkışının sadece girişin önceki değerlerine bağlı olması gerektiğini ve sistem çıkışının girişin gelecekteki değerlerine bağlı olamayacağını kabul edebiliriz.

Bir sistemin herhangi bir t_0 anındaki çıkışı sistemin o ana kadarki girişlerine bağlı ise bu sistem *nedensel sistemdir*. Yani

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t) : t \leq t_0]$$

Bir DZD sistemin nedensel olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul birim dürtü tepkisi $h(t)$'*in* (yani giriş $\delta(t)$ iken sistem çıkışı, Altbölüm 2.1.5'e bakın) nedensel bir işaret olmasıdır. Yani $t < 0$ için $h(t)=0$ olmalıdır. Nedensel olmayan sistemler için ise, t_0 anındaki sistem çıkışı girişin t_0'dan sonraki değerlerine de (yani gelecekteki değerlerine) bağlıdır. Nedensel olmayan sistemler, işaretlerin gerçel zamanlı olarak işlenmediği durumlarda karşımıza çıkabilir.[3]

Örnek 2.1.23.

Türev alıcı nedensel bir sisteme örnek olarak verilebilir. Çünkü bu sistem DZD bir sistemdir ve dürtü tepkisi $h(t) = \delta(t)$ $t < 0$ için sıfırdır. Modülatör ise nedensel ancak zamanla değişen bir sistemdir; çünkü bu sistemin herhangi bir t anındaki çıkışı $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$, sistemin t anındaki girişine bağımlıdır ve $x(t)$'*in* gelecek değerlerine bağımlı değildir. Örnek 2.1.20'de verilmiş olan geciktirme sistemi ise $\Delta \geq 0$ için nedensel iken $\Delta < 0$ için nedensel değildir. (Neden?) Çünkü birim dürtü tepkisi $\delta(t - \Delta)$ eğer $\Delta > 0$ ise $t < 0$ için sıfır olur. Ancak $\Delta < 0$ için sıfırdan farklıdır.

---

[3] Örneğin tüm işaret kayıt edilip daha sonra işlendiğinde. Bu gibi durumlarda t_0 anında işaret işlenirken girişin gelecekteki değerlerine ulaşılabilir.

2.1.5 DZD Sistemlerin Zaman Düzlemi Analizi

DZD sistem sınıflandırması hem haberleşme ve hem de sistem teorisinde önemli bir rol oynar. Bu tür sistemler için giriş-çıkış ilişkisi özellikle basittir ve evrişim (konvolusyon) entegrali ile ifade edilebilir. Bu ilişkinin elde edilebilmesi için ilk olarak sistemin *birim dürtü tepkisi* kavramını ele alacağız.

Bir sistemin *birim dürtü tepkisi* $h(t)$ sistemin giriş işareti birim dürtü $\delta(t)$ olduğunda verdiği tepkidir ve

$$h(t) = \mathcal{T}[\delta(t)]$$

olarak ifade edilir.

Bir sistemin τ anındaki birim dürtü işaretine yani $\delta(t-\tau)$ verdiği tepki ise $h(t,\tau)$ olarak gösterilir. Açık olarak, zamanla-değişmeyen sistemler için $h(t,\tau) = h(t-\tau)$ olur.[4]

Evrişim İntegrali. Şimdi bir DZD sistemin herhangi bir $x(t)$ girişine karşılık üreteceği çıkış, $y(t)$ elde edilebilir. $y(t)$'*in* giriş işareti $x(t)$ ve sistemin dürtü tepkisi $h(t)$ cinsinden ifade edilebileceğini göstereceğiz.

Altbölüm 2.1.3'de herhangi bir $x(t)$ işareti için

$$x(t) = x(t) \star \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \tag{2.1.41}$$

olduğu gösterilmişti. Eğer DZD sistemin sistem $x(t)$ girişine tepkisini $y(t)$ olarak ifade edersek

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}[x(t)] \\ &= \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau\right] \\ &\overset{\text{a}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\mathcal{L}[\delta(t-\tau)]\,d\tau \\ &\overset{\text{b}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \\ &= x(t) \star h(t) \end{aligned} \tag{2.1.42}$$

yazılabilir. Yukarıda (a) ifadesi sistemin doğrusal olmasından (entegralin toplamın limit hali olduğunu hatırlayın) (b) ifadesi ise zamanla-değişmeme özelliklerinden hareket ile elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuç sistemin $x(t)$ girişine cevabının $x(t)$ *ile* $h(t)$'*in* evrişimi olduğunu göstermektedir. Böylece DZD sistemler için dürtü tepkisi, sistemi tamamı ile karakterize edebilmektedir. Bunun anlamı dürtü tepkisinin bir sistemin davranışını tanımlayabilmek için gerekli olan tüm bilgileri ihtiva ettiğidir.

---

[4] Bu notasyonun mutlak olduğuna dikkat edin. Bu notasyonda h iki değişkene sahip olan $h(l,\tau)$ fonksiyonu ile tek değişkenlik $h(t)$ fonksiyonu gibi iki farklı fonksiyonu göstermek için kullanılmıştır.

Örnek 2.1.24.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \tag{2.1.43}$$

ilişkisi ile tanımlanan sistem entegral alıcı olarak isimlendirilir. Entegral işlemi doğrusal olduğundan bu sistem doğrusaldır. Ayrıca $x(t-t_0)$ girişi için

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_{-\infty}^{t} x(\tau - t_0)\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t-t_0} x(u)\, du \\ &= y(t-t_0) \end{aligned} \tag{2.1.44}$$

yukarıda $u = \tau - t_0$ değişken değişimi kullanılmıştır. Bu sonuçtan sistemin DZD bir sistem olduğu görülebilir. Girişe birim dürtü uygulanarak dürtü tepkisi elde edilebilir. Yani

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = u_{-1}(t)$$ ■

Örnek 2.1.25.

Bir doğrusal zamanla-değişmeyen sistemin dürtü tepkisi $h(t)$ olsun. Bu sisteme kompleks üstel fonksiyon giriş olarak verilsin. Yani $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 2+\theta)}$. Bu giriş için sistem

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) A e^{j(2\pi f_0(t-\tau)+\theta)} d\tau \\ &= Ae^{j\theta} e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau \\ &= A|H(f_0)| e^{j\left(2\pi f_0 t+\theta+\angle H(f_0)\right)} \end{aligned} \tag{2.1.45}$$

şeklinde bir çıkışa sahip olur. Burada

$$H(f_0) = |H(f_0)| e^{j\angle H(f_0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau \tag{2.1.46}$$

şeklindedir. Bu sonuç *DZD bir sisteme f_0 frekansında bir kompleks üstel verildiği zaman çıkışın aynı frekansta kompleks üstel olduğunu* göstermektedir. Cevabın genliği giriş işaretinin genliğinin $|H(f_0)|$ ile çarpımından, faz büyüklüğü ise giriş işaretinin fazına $\angle H(f_0)$ fazının eklenmesi ile elde edilir. Burada $H(f_0)$'in dürtü tepkisinin ve giriş frekansının bir fonksiyonu olduğuna dikkat edin. Bu özellikten dolayı, kompleks üstel fonksiyonlar doğrusal zamanla-değişmeyen sistemlerin *özfonksiyonları (eigenfunctions)* olarak isimlendirilirler. Bir sistemin özfonksiyonları sistemin çıkışının sistem girişinin ölçeklendirilmesi ile elde edilebildiği giriş işaret setlerini ifade eder. Bu önemli özellik sayesinde DZD sistemlerin kompleks üstel işaretlere tepkisinin bulunması oldukça basittir. Bundan dolayı tüm işaretlerin kompleks üstel işaretler cinsinden ifade edilmesi arzu edilir. Bunun nasıl gerçekleştirileceği daha sonra ele alınacaktır. ■

2.2 FOURİER SERİLERİ

Haberleşme sistemlerinde temel blokların büyük bir kısmı doğrusal zamanla-değişmeyen sistemler olarak modellenebilir. DZD sistemler haberleşme kanallarının büyük çoğunluğu için de yeterli ve doğru modeller sunmaktadır. Ayrıca alıcı ve vericilerin, süzgeç, kuvvetlendirici ve dengeleyici gibi bazı temel bileşenleri de DZD sistemlerdir.

Bizim temel amacımız doğrusal zamanla-değişmeyen sistemleri analiz edebilmek için gerekli yöntem ve araçların geliştirilmesidir. Bir sistemi analiz eder iken, verilen bir giriş için çıkışının belirlenmesi ve aynı zamanda sistemin davranışına dair bir bilgi edinmek isteriz. Bir DZD sistemin giriş çıkışının

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)\,d\tau \qquad (2.2.1)$$

ifadesi ile verilen evrişim entegrali ile ilişkilendirilmiş olduğunu göstermiştik. Burada *h(t)* sistemin dürtü tepkisini ifade etmektedir. Evrişim entegrali bir DZD sistemin analizi için temel bir araçtır. Ancak, evrişim entegralinin doğrudan kullanımında bir takım mahsurlar vardır. Örneğin, bir DZD sistemin tepkisini bulmak için evrişim entegralinin kullanımı ilk olarak akla gelen fakat her zaman kolay olmayan bir işlevdir. İkinci olarak, evrişim entegrali fazla bir çaba gösterilmeden uygulanabilir ancak bu işlev sistemin gerçekten *ne iş yaptığına dair* çok az bilgi sunmaktadır.

Aşağıda izleyen iki altbölümde DZD sistemlerin analizinde kullanılabilecek farklı bir yaklaşım geliştirilecektir. Bu yaklaşımda temel fikir *giriş işaretini, çıkışı kolaylıkla bulunabilecek bazı temel işaretlerin doğrusal kombinasyonu olarak ifade etmek ve sistemin doğrusallık özelliğinin kullanılması ile sistem çıkışını elde etmek* şeklindedir. Bu yaklaşım evrişim entegralinin doğrudan uygulanmasına nazaran daha kolaydır; aynı zamanda DZD sistemin davranışı hakkında daha iyi bilgi sunar. Bu yöntem, işaretlerin temel işaret setleri cinsinden ifade edilmesi ile Öklid uzayında vektörlerin temel vektörler cinsinden ifade edilmesi şeklindeki yakın benzerliğe dayanmaktadır.

2.2.1 Fourier Serileri ve Özellikleri

Kompleks üstel fonksiyon setinin DZD sistemlerin özfonksiyonu olduğu gösterilmişti. Bir DZD sistemin kompleks üstel girişe tepkisi *genlik ve fazı değiştirilmiş* bir kompleks üsteldir. Örnek 2.1.15 genlik ve fazdaki değişimin kompleks üstel ve DZD sistemin dürtü tepkisinin bir fonksiyonu olduğunu göstermişti. Öyle ise hangi işaretler kompleks üsteller cinsinden ifade edilebilir? Bu soruyu cevaplamak için, periyodik bir işaretin kompleks üstellere ayrıştırılması için gerekli şartlar ele alınacaktır. Periyodik olmayan işaretlerin açılımı ise daha sonra ele alınacaktır.

$x(t)$ işareti T_0 periyoduna sahip periyodik bir işaret olsun. İlk olarak, aşağıdaki Dirichlet şartlarının sağlanıp sağlanmadığı belirlenmelidir.

1. $x(t)$ bir periyot boyunca mutlak olarak entegrali alınabilir olmalıdır. Yani

$$\int_0^{T_0} |x(t)|dt < \infty$$

2. $x(t)$'in bir periyot içerisinde maximum ve minimum noktaları sınırlı sayıda olmalı,
3. Bir periyot içerisinde $x(t)$ işaretinin süreksizlikleri sınırlı sayıda olmalıdır.

Eğer bu koşullar sağlanır ise bu durumda $x(t)$'in $\{e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ şeklinde verilen kompleks üstel fonksiyonlar cinsinden açılımı aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} \tag{2.2.2}$$

Burada

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt \tag{2.2.3}$$

şeklindedir ve α herhangi bir sayıdır.

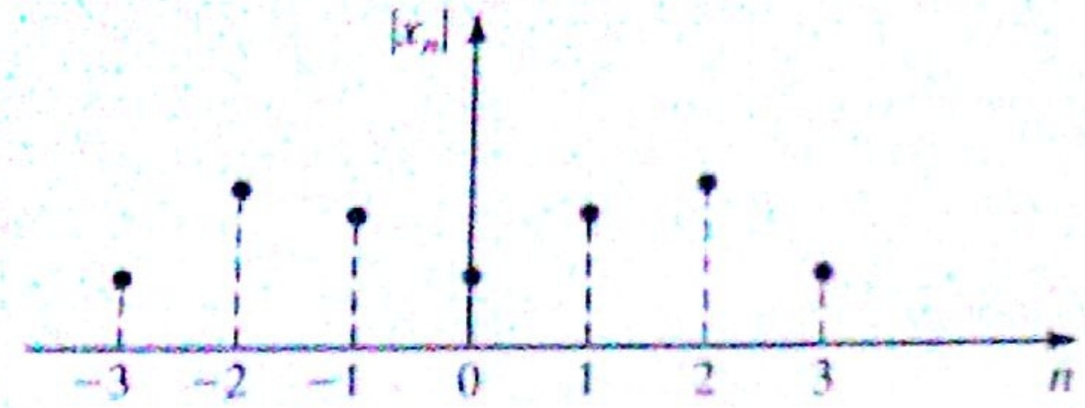
Bu teorem ile ilgili bazı gözlemler şu şekilde sıralanabilir:

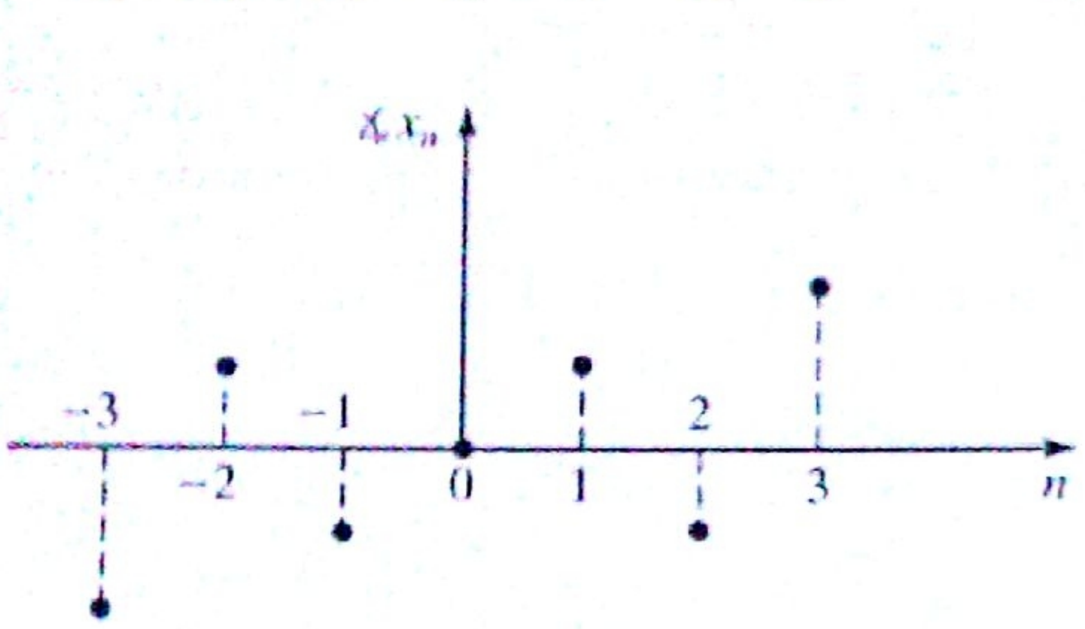
- x_n katsayıları $x(t)$ işaretinin Fourier seri katsayıları olarak isimlendirilir. Bunlar genellikle kompleks sayılardır ($x(t)$ işaretinin kendisi gerçel bir işaret olsa da).
- α parametresi herhangi bir sayıdır. Entegral işlemini kolaylaştıracak şekilde seçilebilir. Genellikle $\alpha = 0$ veya $\alpha = -T_0/2$ olarak seçilmesi uygundur.
- Dirichlet şartları Fourier seri açılımının varlığı için sadece *yeterli* şartlardır. Bazı işaretler için bu şartlar sağlanmasa dahi Fourier seri açılımı mevcut olabilir.
- $f_0 = \frac{1}{10}$ büyüklüğü *temel frekans* olarak isimlendirilir. Kompleks üstel işaretlerin frekansları bu frekansın katları şeklindedir. f_0 frekansının *n'inci* katı *n'inci harmonik* olarak adlandırılır.
- Kavramsal olarak oldukça önemli sonuçlardır. Bu sonuç bir $x(t)$ periyodik işaretinin T_0 periyodu (veya f_0 temel frekansı) ve kompleks sayı dizisi $\{x_n\}$ ile ifade edilebileceğini söylemektedir. Dolayısı ile $x(t)$ işaretini tanımlamak için *sınırlı bir kompleks sayı setinin* belirlenmesi gerekir. Bu $x(t)$ işaretinin tanımlanma karmaşıklılığını ciddi bir şekilde basitleştirmektedir. Çünkü normalde x(t) işaretini tanımlamak için t'in her noktası için *sınırsız sayıda noktadan oluşan setin* belirlenmesi gerekir.
- Fourier seri açılımı açısal frekans $\omega_0 = 2\pi / f_0$ ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$x_n = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega_0}} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \tag{2.2.4}$$

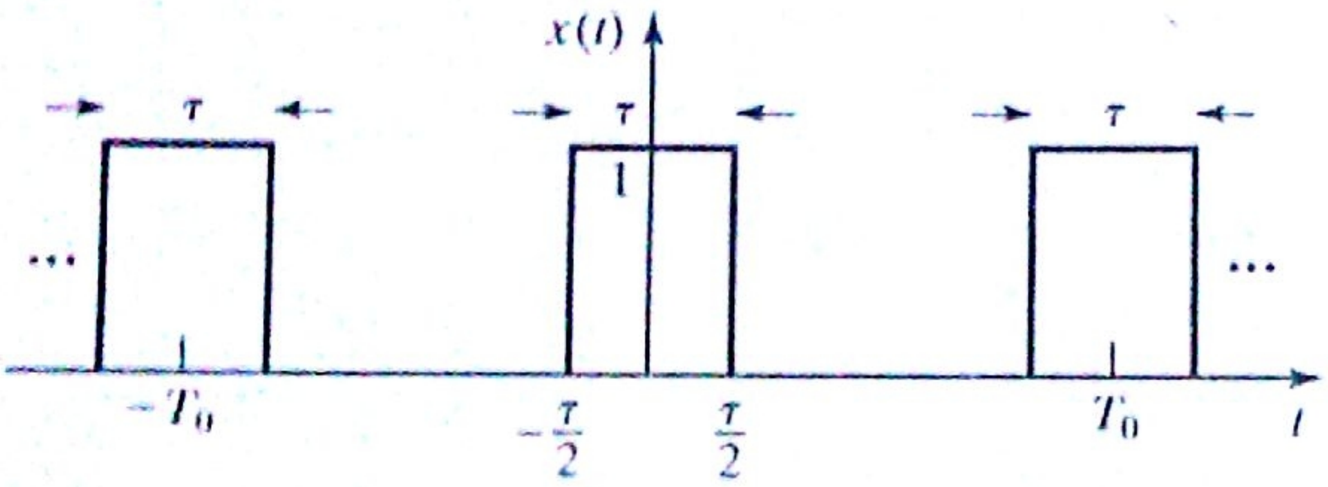
ve

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{jn\omega_0 t} \tag{2.2.5}$$





Şekil 2.24 $x(t)$'in ayrık tayfı (spektrumu)



Şekil 2.25 Denklem (2.2.6) da verilen periyodik $x(t)$ işareti

- Genel olarak $x_n = |x_n| e^{j\angle x_n}$ şeklindedir. Dolayısı ile $|x_n|$ *n.inci* harmoniğin genliğini ve $\angle x_n$ faz büyüklüğünü vermektedir. Şekil 2.24. $x(t)$ işaretindeki farklı harmoniklerin genlik ve faz grafiklerini vermektedir. Bu tip grafik $x(t)$ periyodik işaretinin *ayrık tayf (spektrum)* olarak adlandırılır.

Örnek 2.2.1.

$x(t)$ işareti Şekil 2.25'de verilen periyodik bir işaret olsun ve analitik olarak

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - nT_0}{\tau}\right) \tag{2.2.6}$$

şeklinde verilsin. Burada τ pozitif bir sabittir (darbe uzunluğu). Bu işaret için Fourier seri açılımını belirleyin.

Çözüm İlk olarak işaretin periyodunun T_0 olduğu görmekteyiz ve

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\frac{2\pi t}{T_0}} dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} 1\, e^{-jn\frac{2\pi t}{T_0}}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\frac{T_0}{-jn2\pi}\left[e^{-jn\frac{\pi\tau}{T_0}} - e^{+jn\frac{\pi\tau}{T_0}}\right] \quad n \neq 0$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right) \quad n \neq 0$$

$$= \frac{\tau}{T_0}\operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) \quad n \neq 0 \qquad (2.2.7)$$

olur. Burada $\phi = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$ ilişkisi kullanılmıştır. $n=0$ için entegral işlemi oldukça basittir ve sonuç olarak $x_0 = \frac{\tau}{T_0}$ bulunur. Dolayısı ile

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{T_0}\operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) e^{jn\frac{2\pi t}{T_0}} \qquad (2.2.8)$$

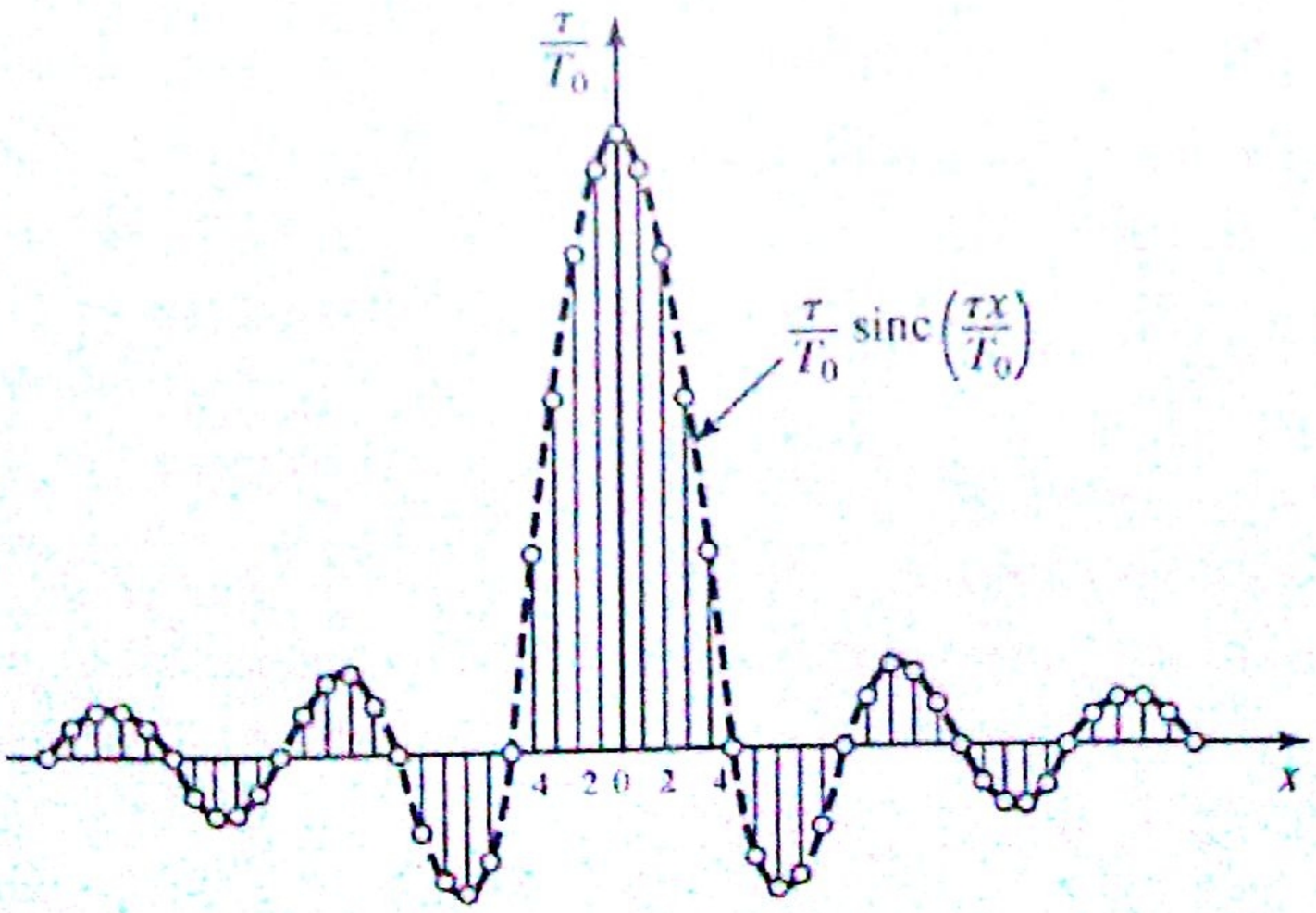
Bu Fouirer seri katsayılarının grafiği Şekil 2.26'da gösterilmektedir. ■

Örnek 2.2.2.

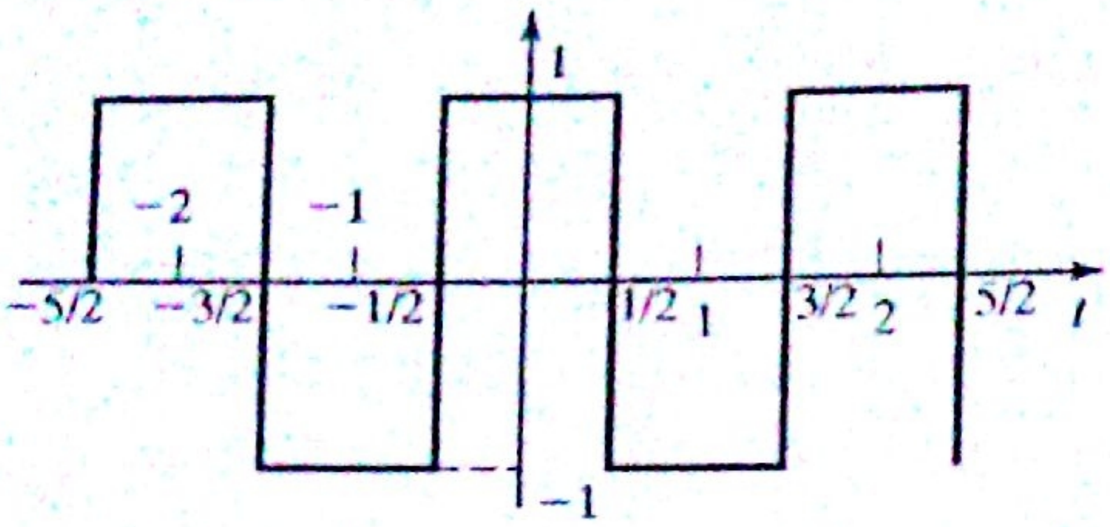
Şekil 2.27'de verilmiş olan ve

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \Pi(t-n) \qquad (2.2.9)$$

şeklinde tanımlanmış olan $x(t)$ işareti için Fourier seri açılımını belirleyin.



Şekil 2.26. Dikdörtgen darbe katarının ayrık tayfı (spektrumu)



Şekil 2.27 2.2.9 denkleminde verilmiş olan $x(t)$ işareti

Çözüm T_0=2 olduğu için $\alpha = -\frac{1}{2}$ seçmek uygundur. İlk olarak $n = 0$ için entegralin sıfır olduğu kolaylıkla gösterilebilir; dolayısı ile $x_0 = 0$ olacaktır. $n \neq 0$ için ise

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x(t)e^{-jn\pi t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-jn\pi t}dt - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{-jn\pi t}dt \\ &= -\frac{1}{j2\pi n}\left[e^{-j\frac{n\pi}{2}} - e^{j\frac{n\pi}{2}}\right] - \frac{1}{-j2\pi n}\left[e^{-jn\frac{3\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}\right] \\ &= \frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n\pi}e^{-jn\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n\pi}(1-\cos(n\pi))\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & n = 4k+1 \\ -\frac{2}{n\pi} & n = 4k+3 \\ 0 & n \text{ çift} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

bulunur. Bu x_n değerlerinden hareket ile aşağıdaki Fourier seri açılımı elde edilir.

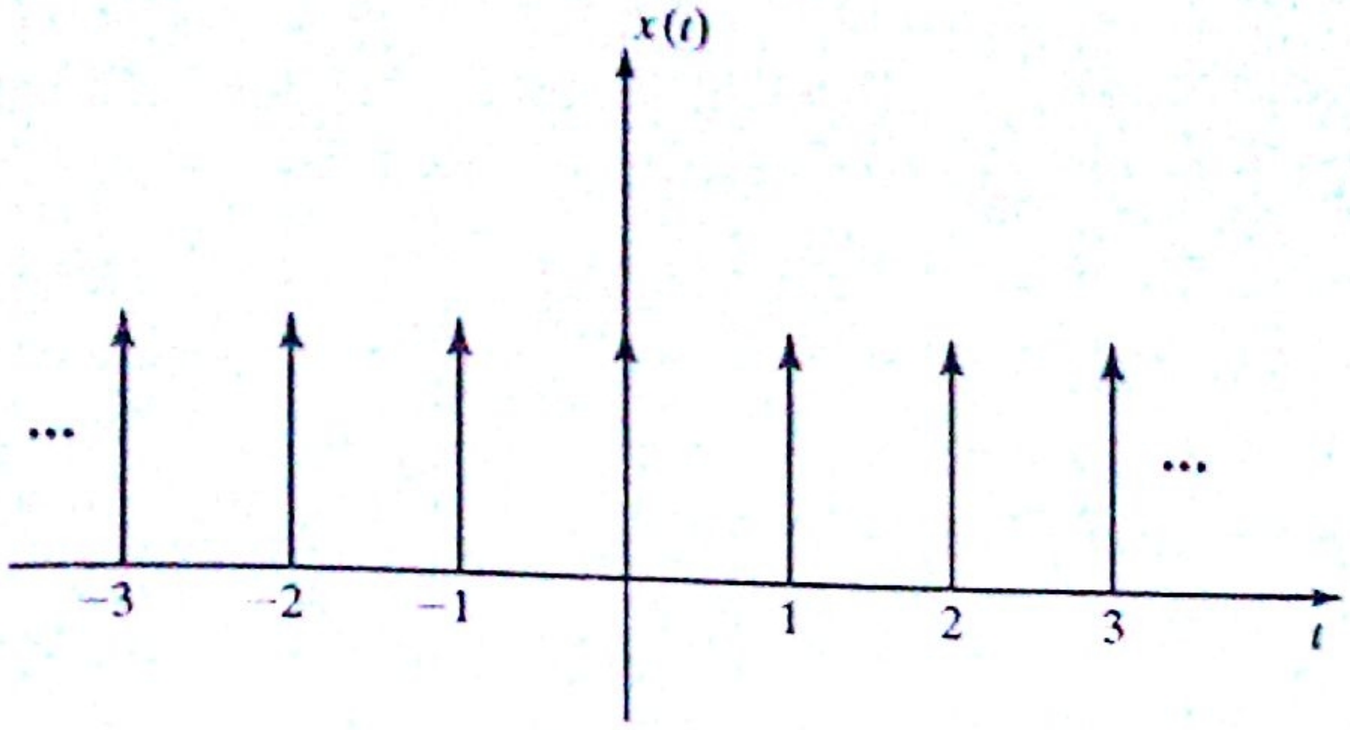
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{\pi}(e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}) - \frac{2}{3\pi}(e^{j3\pi t} + e^{-j3\pi t}) + \frac{2}{5\pi}(e^{j5\pi t} + e^{-j5\pi t}) - \cdots \\ &= \frac{4}{\pi}\cos(\pi t) - \frac{4}{3\pi}\cos(3\pi t) + \frac{4}{5\pi}\cos(5\pi t) - \cdots \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos[(2k+1)\pi t] \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

■

Örnek 2.2.3

Şekil 2.28'de gösterilen ve *Darbe katarı* olarak ifade edilen aşağıdaki işaretin Fourier seri gösterimini belirleyin.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_0) \tag{2.2.12}$$



Şekil 2.28 Darbe katarı

Çözüm

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \delta(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \qquad (2.2.13)$$

Bu katsayılar ile aşağıdaki açılım elde edilir.

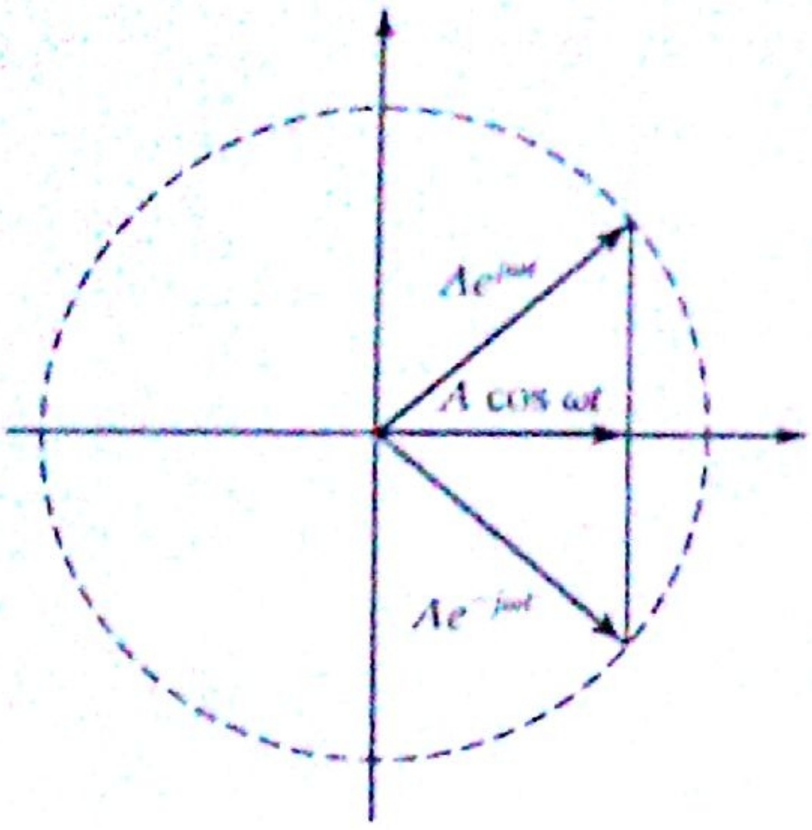
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} \qquad (2.2.14)$$

Pozitif ve Negatif Frekanslar. Periyodik bir $x(t)$ işaretinin Fourier seri açılımının

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

şeklinde ifade edilebileceğini gösterdik. Burada temel frekans $\frac{1}{T_0}$'ın hem pozitif ve hem de negatif katsayıları mevcuttur. Pozitif frekans $e^{j\omega t}$ formundaki terimler ile (pozitif ω için), negatif frekans ise $e^{-j\omega t}$ ile ifade edilmektedir. $e^{j\omega t}$ terimi saat yönünün tersinde ω açısal hızı ile dönen bir fazörü temsil ederken, $e^{-j\omega t}$ aynı frekansta saat yönünde dönen bir fazörü gösterir. Bu iki fazöürün grafiği Şekil 2.29'da verilmiştir.

$e^{j\omega t}$ ve $e^{-j\omega t}$ işaretleri toplanır ise sonuç $\pm\frac{\omega}{2\pi}$ frekansında iki frekans bileşenine sahip gerçel bir işaret olan $2\cos\omega t$ olur. Daha sonra göreceğimiz gibi bu özellik tüm gerçel işaretler için geçerlidir. Yani gerçel işaretler için frekanslar eşlenik genliklere sahip pozitif ve negatif çiftler şeklinde görülür.



Şekil 2.29 Pozitif ve negatif frekansları temsil eden fazörler

Gerçel İşaretler için Fourier Serileri. Eğer $x(t)$ işareti Fourier seri teoreminin şartlarını sağlayan gerçel bir işaret ise bu durumda $x(t)$ işaretinin açılımı için farklı yollar mevcut olmalıdır. Gerçel bir $x(t)$ işareti için

$$x_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt\right]^*$$

$$= x_n^* \qquad (2.2.15)$$

Bu eşitliğin anlamı gerçel işaret $x(t)$'in pozitif ve negatif katsayılarının eşlenik olduğudur. Dolayısı ile n=0 eksenine göre $|x_n|$ çift simetriye ($|x_n| = |x-n|$) ve $\angle x_n$ tek simetriye ($\angle x_n = -\angle x_{-n}$) sahiptir. Gerçel bir işaret için ayrık tayf (spektrum) Şekil 2.30'da gösterilmektedir.

$x_{-n} = x_n^*$ eşitliğinden, hareket ile

$$x_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

ise bu durumda

$$x_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

olur. Dolayısı ile $n \geq 1$ için

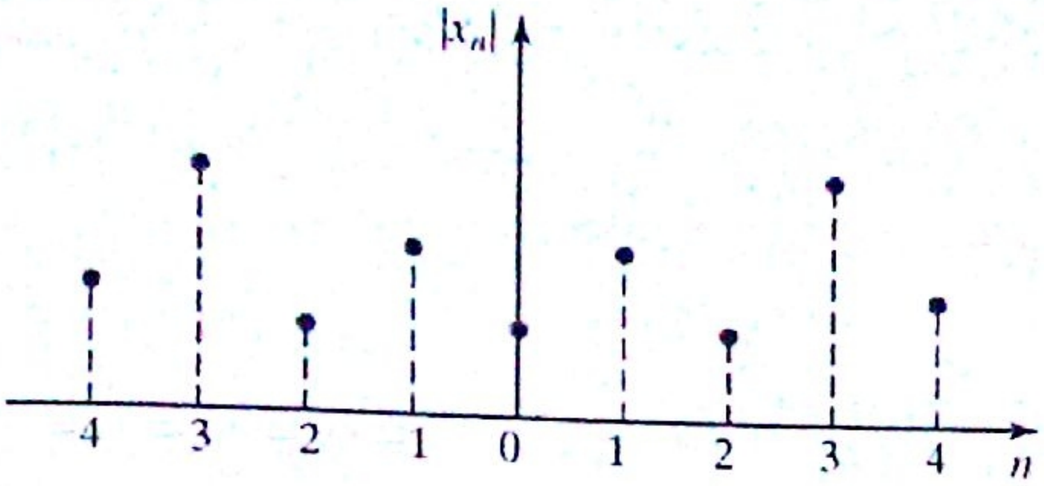
$$x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} + x_{-n}e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t} = \frac{a_n - jb_n}{2}e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} + \frac{a_n + jb_n}{2}e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

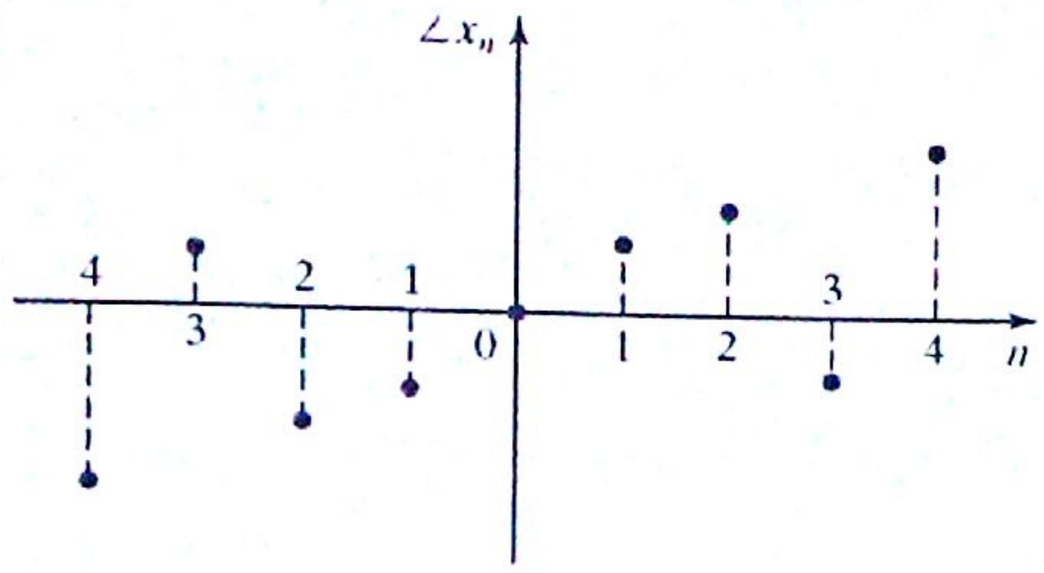
$$= a_n\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right) + b_n\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)$$

x_0 gerçel olduğundan ve $x_0 = \frac{a_0}{2}$ şeklinde verildiğinden

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right) + b_n\sin(2\pi\frac{n}{T_0}t)\right] \qquad (2.2.16)$$

elde edilir.





Şekil 2.30 Gerçel değerli işaretin ayrık tayfı (spektrumu)

Sadece gerçel periyodik işaretler için geçerli olan bu ilişki *trigonometrik Fourier seri açılımı* olarak isimlendirilir. a_n ve b_n katsayılarını elde etmek için

$$x_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt$$

dolayısı ile

$$\frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)dt - \frac{j}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)dt$$

sonuç olarak

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)dt \qquad (2.2.17)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)dt \qquad (2.2.18)$$

Gerçel bir işaretin Fourier açılımını ifade etmek için üçüncü bir yol daha mevcuttur.

$$x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} + x_{-n}e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t} = 2|x_n|\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t + \angle x_n\right) \qquad (2.2.19)$$

olduğu göz önüne alınır ve (2.2.19) (2.2.2) ifadesinde yerine konulur ise

$$x(t) = x_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t + \angle x_n\right) \qquad (2.2.20)$$

Özet olarak gerçel periyodik bir işaret $x(t)$ için Fourier seri açılımını ifade etmenin üç alternatif yolu mevcuttur.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \tag{2.2.21}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) \right] \tag{2.2.22}$$

$$= x_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t + \angle x_n\right) \tag{2.2.23}$$

Burada ilgili katsayılar

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2} \tag{2.2.24}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt \tag{2.2.25}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt \tag{2.2.26}$$

$$|x_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{2.2.27}$$

$$\angle x_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{2.2.28}$$

ifadelerinden elde edilir.

Örnek 2.2.4

Örnek 2.2.1 için sinüs ve cosinüs katsayılarını belirleyin.

Çözüm Daha önceden gösterildiği gibi

$$x_n = \frac{\tau}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

Bundan dolayı

$$\begin{cases} a_n = \frac{2\tau}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) \\ b_n = 0 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} |x_n| = \left|\frac{2\tau}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)\right| \\ \angle x_n = 0 \text{ veya } \pi \end{cases}$$

bulunur. ■

Tek ve Çift İşaretler İçin Fourier Seri Açılımı. Eğer gerçel bir işaret aynı zamanda çift veya tek ise, bu durumda işaretin Fourier seri açılımında daha fazla basitleştirmeler yapmak mümkündür. Çift bir $x(t)$ işareti için

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)\,dt = 0 \qquad (2.2.29)$$

olur. $x(t)\sin(2\pi\frac{n}{T_0}t)$ terimi çift ve tek iki işaretin çarpımı olduğundan terim tek simetriye sahip bir işaret olacak ve entegralin sonucu sıfır olacaktır. Dolayısı ile çift işaretler için Fourier seri açılımında sadece cosinus'lu terimler bulunacaktır, yani

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right) \qquad (2.2.30)$$

olur. Benzer bir şekilde $x_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ olduğundan çift işaretlere için tüm x_n değerlerinin gerçel (veya tüm fazların x_n'in işaretine bağlı olarak 0 veya π) olacağı görülür.

Tek simetriye sahip işaretler için ise, benzer bir şekilde, tüm a_n terimlerinin sıfır olacağını; bundan dolayı da Fourier seri açılımının sadece sinus'lü terimleri ihtiva edeceğini veya tüm x_n'lerin sanal olacağını söyleyebiliriz. Bu durumda

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right) \qquad (2.2.31)$$

elde edilir.

Örnek 2.2.5

T_0 =2 olduğunu varsayarak, Şekil 2.31'de gösterilen işaretin Fourier seri açılımını belirleyin.

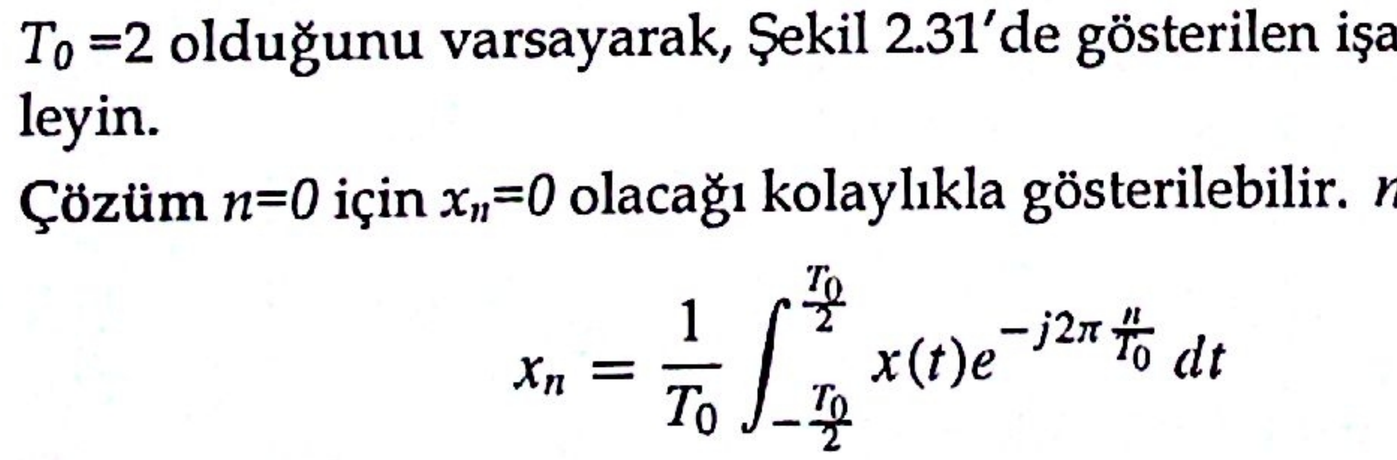
Çözüm $n=0$ için $x_n=0$ olacağı kolaylıkla gösterilebilir. $n \neq 0$ için ise

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)e^{-j\pi nt}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0}(-t-1)e^{-j\pi nt}dt + \int_{0}^{+1} te^{-j\pi nt}dt\right]$$

olur.



Şekil 2.31 Bir tek-harmonik işaret örneği

$$\int te^{\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}te^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha t}$$

eşitliğini kullanarak

$$\int te^{-j\pi nt}\,dt = \frac{j}{\pi n}te^{-j\pi nt} + \frac{1}{\pi^2 n^2}e^{-j\pi nt}$$

elde edilir. Dolayısı ile

$$\begin{aligned} x_n &= -\frac{j}{2\pi n}te^{-j\pi nt}\Big]_{-1}^{0} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}e^{-j\pi nt}\Big]_{-1}^{0} \\ &\quad -\frac{j}{2\pi n}e^{-j\pi nt}\Big]_{-1}^{0} + \frac{j}{2\pi n}te^{-j\pi nt}\Big]_{0}^{1} + \frac{1}{2\pi^2 n^2}e^{-j\pi nt}\Big]_{0}^{1} \\ &= (\cos(\pi n) - 1)\left(\frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{j}{2\pi n}\right) \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{\pi^2 n^2} - \frac{j}{\pi n} & n \text{ tek} \\ 0 & n \text{ çift} \end{cases} \end{aligned}$$

olur. Burada $x_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ olduğu göz önüne alınarak

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2 n^2} & n \text{ tek} \\ 0 & n \text{ çift} \end{cases}$$

ve

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi n} & n \text{ tek} \\ 0 & n \text{ çift} \end{cases}$$

elde edilir.

İşaretin Fourier seri açılımı bu durumda

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi(2n+1)}\sin(2n+1)\pi t - \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi t\right]$$

olur. Açık olarak işaretin sadece tek harmonikleri içerdiği görülebilir. Hiçbir çift harmonik Fourier seri açılımında mevcut değildir.

2.2.2 DZD Sistemlerin Periyodik İşaretlere Tepkileri

Daha önce gördüğümüz gibi DZD sistemlerin kompleks bir üstel işarete tepkisi yine aynı frekansa sahip ancak genliği ve fazı değiştirilmiş bir kompleks üsteldir. Eğer sistemin dürtü tepkisi $h(t)$ ise 2.1.25 örneğinden hareket ile sistem tepkisinin üstel işaret $e^{j2\pi f_0 t}$ için tepkisinin $H(f_0)e^{j2\pi_0 t}$ olacağını biliyoruz. Burada

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

olarak verilir.

Bu noktada DZD sisteme giriş olarak verilen $x(t)$ işaretinin T_0 periyoduna sahip periyodik bir işaret olduğunu ve aşağıdaki Fourier seri açılımına sahip varsayalım.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}[x(t)] \\ &= \mathcal{L}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}\right] \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n \mathcal{L}\left[e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}\right] \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

bulunur. Burada

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Bu ilişkiden hareket ile aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

- Eğer DZD sisteme T_0 periyoduna sahip bir giriş işareti uygulanır ise, çıkış da periyodik olur (Çıkışın periyodu ne olur?). Çıkış

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

Fourier seri açılımına sahiptir ve burada

$$y_n = x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

Bu sonuçtan hareket ile

$$|y_n| = |x_n| \cdot \left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|$$

ve

$$\angle y_n = \angle x_n + \angle H\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

elde edilir.

- Sadece girişte mevcut olan frekans bileşenleri çıkışta gözükür. Bunun anlamı *DZD sistemlerin çıkışlarında, sistem girişinde mevcut olmayan yeni frekans bileşenleri türetmedikleridir.* Diğer bir deyiş ile çıkışında girişinden farklı yeni frekans bileşenleri oluşturan tüm sistemler doğrusal olmayan ve/veya zamanla değişen sistemlerdir.
- Genlik $\left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|$ ve fazda $\angle H\left(\frac{n}{T_0}\right)$ meydana gelen değişimin büyüklüğü harmonik sıranın, n ve sistemin dürtü cevabı $h(t)$'in fonksiyonudur.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{2.2.33}$$

fonksiyonu DZD sistemin *frekans tepkisi* veya *frekans karakteristiği* olarak adlandırılır. Genel olarak $H(f)$ kompleks bir fonksiyon olduğundan genlik $|H(f)|$ ve faz $\angle H(f)$ bileşenleri ile tanımlanır. $H(f)$ fonksiyonu veya $h(t)$, periyodik bir giriş için DZD sistemin tepkisini belirlemede ihtiyacımız olan tek bilgidir.

Örnek 2.2.6.

$x(t)$ Şekil 2.27'de verilmiş olan işaret olsun. Ancak işaretin periyodu $T_0 10^{-5}$ alınsın. Bu işaret frekans tepkisi Şekil 2.32'de verilmiş olan bir süzgeçten geçmektedir. Bu durumda süzgeç çıkışını belirleyin.

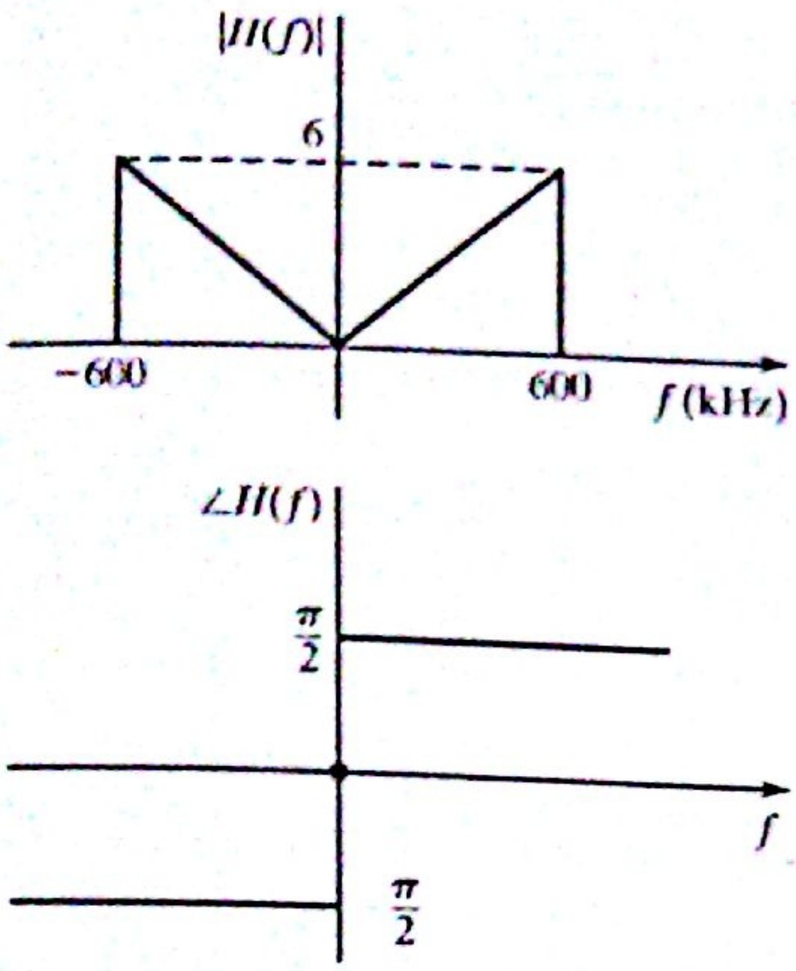
Çözüm. İlk olarak giriş işaretinin Fourier seri açılımını tespit edelim. Bu

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\left(2\pi(2n+1)10^5 t\right) \\ &= \frac{2}{\pi}e^{j2\pi 10^5 t} + \frac{2}{\pi}e^{-j2\pi 10^5 t} \\ &\quad - \frac{2}{3\pi}e^{j6\pi 10^5 t} - \frac{2}{3\pi}e^{-j6\pi 10^5 t} \\ &\quad + \frac{2}{5\pi}e^{j10\pi 10^5 t} + \frac{2}{5\pi}e^{-j10\pi 10^5 t} - \cdots \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

olarak kolayca bulunabilir. Her bir frekans bileşenine karşılık gelecek çıkışı belirlemek için her bir frekans bileşeninin katsayısını $H(f)$ katsayıları ile çarpmamız gerekir. Bu katsayılar

$$\begin{aligned} H(10^5) &= 1e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j\frac{\pi}{2}} \\ H(-10^5) &= 1e^{-j\frac{\pi}{2}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ H(3\times 10^5) &= 3e^{j\frac{\pi}{2}} \\ H(-3\times 10^5) &= 3e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ H(5\times 10^5) &= 5e^{j\frac{\pi}{2}} \\ H(-5\times 10^5) &= 5e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \tag{2.2.35}$$

olarak bulunur.



Şekil 2.32 Süzgecin frekans tepkisi

Daha yüksek frekanslar için $H(f)=0$ olacaktır. Dolayısı ile

$$y(t) = \frac{2}{\pi}e^{j(2\pi 10^5 t+\frac{\pi}{2})} + \frac{2}{\pi}e^{j(-2\pi 10^5 t-\frac{\pi}{2})} - \frac{2}{\pi}e^{j(6\pi 10^5 t+\frac{\pi}{2})} - \frac{2}{\pi}e^{j(-6\pi 10^5 t-\frac{\pi}{2})} + \frac{2}{\pi}e^{j(10\pi 10^5 t+\frac{\pi}{2})} + \frac{2}{\pi}e^{j(-10\pi 10^5 t-\frac{\pi}{2})}$$

elde edilir. Bu sonuç düzenlenir ise

$$y(t) = -\frac{4}{\pi}\sin(2\pi 10^5 t) + \frac{4}{\pi}\sin(6\pi 10^5 t) - \frac{4}{\pi}\sin(10\pi 10^5 t) \qquad (2.2.36)$$

olarak bulunur. ■

2.2.3 Parseval İlişkisi

Parseval ilişkisi bir periyodik işaretinin güç içeriğinin, bu işaretin Fourier seri açılımındaki bileşenlerinin güç içeriklerinin toplamına eşit olduğunu ifade eder. Bu ilişki Fourier seri açılımında kullanılan temel işaretin, yani kompleks üstel işaretin, dikgen oluşunun (orthogonality) bir sonucudur.

Bir periyodik $x(t)$ işaretinin Fourier seri açılımının

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

olarak verildiğini kabul edelim. Bu durumda ifadenin her iki yanındaki terimlerin kompleks eşlenikleri

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n^* e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

şeklinde olur. Elde edilen her iki ifadeyi birbiri ile çarparsak

$$|x(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_n x_m^* e^{j2\pi \frac{n-m}{T_0} t}$$

bulunur. Burada ifadenin bir periyot boyunca entegrali alınır ise ve

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} e^{j2\pi \frac{n-m}{T_0} t} dt = T_0 \delta_{mn} = \begin{cases} T_0 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

ilişkisi kullanılır ise

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_n x_m^* T_0 \delta_{mn}$$

$$= T_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 \qquad (2.2.37)$$

sonucu elde edilir. Düzenleme yapılır ise

$$\frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 \qquad (2.2.38)$$

bulunur. Bu Parseval ilişkisinin formal ifadesidir. (2.1.14) denklemi gereği yukarıdaki ifadenin sol tarafı $x(t)$ işaretinin güç içeriği P_x'tir ve $|x_n|^2$ n.inci harmonik olan $x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0}}$'in güç içeriğine karşılık gelmektedir. Bundan dolayı Parseval ilişkisi periyodik bir işaretin güç içeriğinin bu işaretin harmoniklerinin güç içeriklerinin toplamı eşit olduğunu bildirir.

Eğer Parseval ilişkisinde $x_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ kullanılır ise

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \qquad (2.2.39)$$

elde edilir. $a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0}\right)$ ve $b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0}\right)$ güç içerikleri sırası ile $\frac{a_n^2}{2}$ ve $\frac{b_n^2}{2}$ olduğundan, $x(t)$ işaretinin güç içeriği harmoniklerinin güç içeriğinin toplamıdır.

Örnek 2.2.7

Örnek 2.2.6'da verilen giriş ve çıkış işaretlerinin güç içeriğini belirleyin.

Çözüm İşaretin gücü olarak bulunur,

$$P_x = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 1 dt \right] = 1$$

Aynı sonuç Parseval ilişkisi kullanılarak da bulunabilir,

$$P_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{2} = \frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots \right)$$

her iki eşitlikten hareket ile

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

elde edilir. Çıkışın gücü

$$P_y = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+2} |y(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\right] = \frac{24}{\pi^2}$$

olarak bulunur. ■

2.3 FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

2.3.1 Fourier Serilerinden Fourier Dönüşümüne

Daha önce gösterildiği gibi Fourier serileri periyodik bir işaretin kompleks üsteller cinsinden ifade edilmesi için kullanılabilir. Bu gösterim periyodik işaretlerin tanımlanma karmaşıklığını ciddi bir şekilde azaltır. Aynı şekilde işaretlerin kompleks üsteller cinsinden seri açılımı DZD sistemlerin analizinde de oldukça faydalıdır. Çünkü kompleks üsteller DZD sistemlerin özfonksiyonlarıdır. Dolayısı ile Fourier seri açılım katsayıları,$\{x_n\}$ dizisi ve temel frekans f_0 ile bir periyodik işaret tamamı ile tanımlanabilir.

Bu bölümde Fourier seri gösterimini periyodik olmayan işaretlere uygulayacağız. Periyodik olmayan bir işaretin de kompleks üsteller cinsinden açılımının mümkün olduğu gösterilecektir. Ancak elde edilen tayf (spektrum) artık ayrık bir tayf değildir. Diğer bir deyiş ile periyodik olmayan işaretlerin tayfı bir sürekli frekans aralığını kapsar. Sonuç olarak yaygın olarak bilinen Fourier dönüşümü elde edilir.

Fourier dönüşümü için bir $x(t)$ işaretinin aşağıdaki Dirichlet koşullarını sağlaması gerekir.

1. $x(t)$ gerçel eksen üzerinde mutlak olarak entegrali alınabilir olmalıdır. Yani
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty$$
2. Gerçel eksen boyunca herhangi bir sonlu aralık içinde $x(t)$ işaretinin minimum ve maksimum noktalarının sayısı sınırlı olmalıdır.
3. Gerçel eksen boyunca herhangi bir sonlu aralık içinde $x(t)$ işaretinin süreksizlik noktalarının sayısı sınırlı olmalıdır.

Bu durumda

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \qquad (2.3.1)$$

şeklinde tanımlanan Fourier dönüşümü (veya Fourier entegrali) mevcuttur ve orijinal işaret kendi Fourier dönüşümünden aşağıdaki eşitlik kullanılarak elde edilebilir.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \tag{2.3.2}$$

Fourier dönüşümü için aşağıdaki gözlemler yapılabilir.

- $X(f)$ genellikle kompleks bir fonksiyondur. Dönüşümün genliği ve fazı $x(t)$ işaretinin farklı frekans bileşenlerinin genlik ve fazını temsil eder. $X(f)$ fonksiyonu bazen $x(t)$ işaretinin tayfı (spektrumu) olarak adlandırılır.[5]
- $X(f)$, $x(t)$ işaretinin Fourier dönüşümünü gösterir ve genellikle aşağıdaki notasyonu kullanırız.

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$$

X(f)'in ters Fourier dönüşümünü göstermek için ise aşağıdaki notasyon kullanılacaktır.

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)]$$

Bazen her iki notasyonu aynı anda göstermek için

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

kısa gösterimi kullanılacaktır.

- Eğer Fourier dönüşümünde f yerine ω kullanılır ise bu durumda dönüşüm ifadeleri

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

ve

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

olur.

- Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü ilişkileri

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau\right]}^{X(f)} e^{j2\pi f t} df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f (t-\tau)}\, df\right] x(\tau)\, d\tau \tag{2.3.3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada entegral sırası değiştirilmiştir. Diğer taraftan

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) x(\tau)\, d\tau \tag{2.3.4}$$

---

[5] Bazen X(f), ilerleyen bölümlerde tanımlanacak olan *güç spektrumundan* farklılık oluşturması için *gerilim spektrumu* olarak tanımlanır.

(2.3.3) denklemi ile (2.3.4) denklemi karşılaştırılır ise

$$\delta(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)} df \tag{2.3.5}$$

ve

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} df \tag{2.3.6}$$

elde edilir.

- (2.3.1) denklemi (2.2.3) denklemine ve (2.3.2) denklemi (2.2.2) denklemine benzerlik gösterir. Bu iki denklem arasındaki fark (2.2.2) denkleminde toplam entegral ile yer değiştirmiştir.

Örnek 2.3.1

(2.1.15) denkleminde verilen ve Şekil 2.33'de gösterilen $\Pi(t)$ işaretinin Fourier dönüşümünü belirleyin.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[\Pi(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}\right] \\
&= \frac{\sin \pi f}{\pi f} \\
&= \operatorname{sinc}(f)
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

elde edilir. Dolayısı ile

$$\mathscr{F}[\Pi(t)] = \operatorname{sinc}(f)$$

olur. Şekil 2.33 bu işaretin Fourier dönüşümünü göstermektedir. ■

Örnek 2.3.2

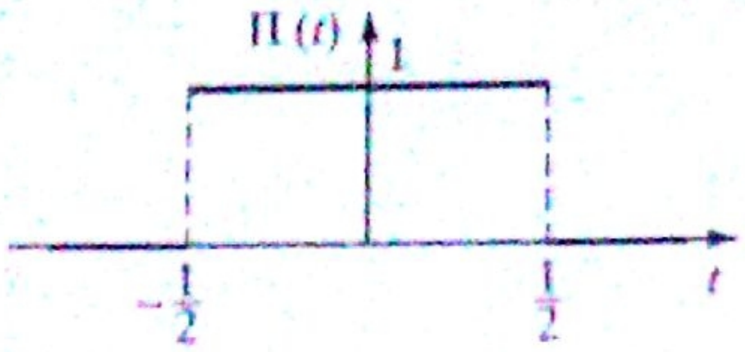
$x(t) = \delta(t)$ dürtü işaretinin Fourier dönüşümünü belirleyin.

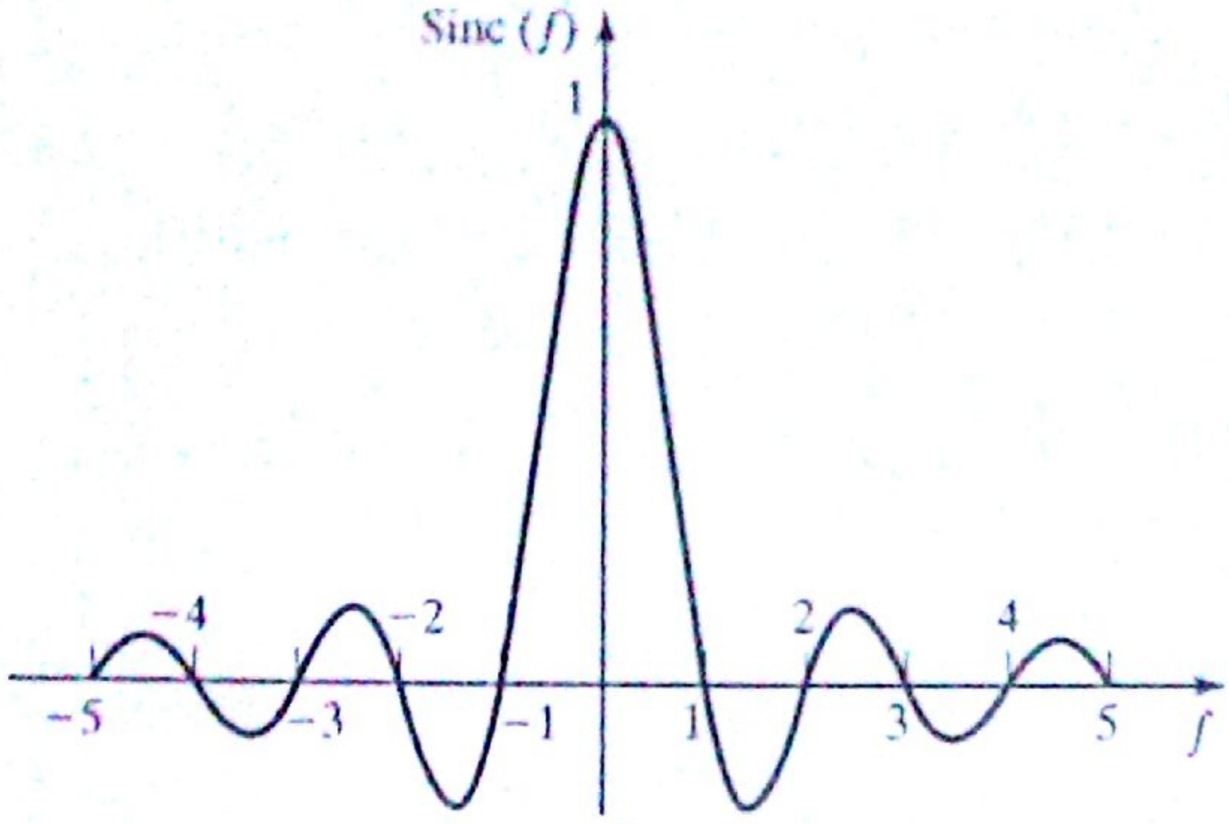
Çözüm Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[\delta(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= 1
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

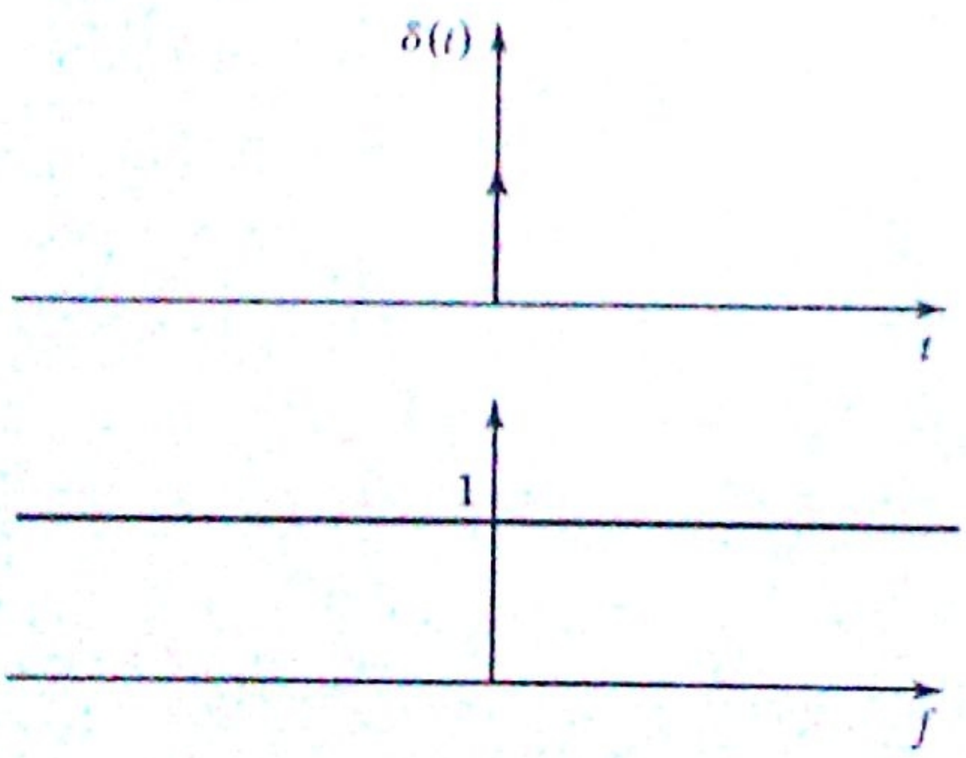
olarak elde edilir. Burada $\delta(t)$ fonksiyonunun eleme özelliği kullanılmıştır. Bu sonuç $\delta(t)$ tayfında birim genlik ve sıfır faz büyüklüğü ile tüm frekansların mevcut olduğunu göstermektedir. $x(t)$ grafiği ve Fourier dönüşümü Şekil 2.34'de verilmiştir. Benzer bir şekilde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} dt = 1$$





Şekil 2.33 $\Pi(t)$ ve Fourier dönüşümü



Şekil 2.34 Dürtü işareti ve işaretin tayfı

ilişkisinden

$$\mathcal{F}[1] = \delta(f)$$

sonucu elde edilir. ■

Örnek 2.3.3

sgn(t) işaretinin Fourier dönüşümünü belirleyin.

Çözüm Çözüme sgn(t) fonksiyonunu Şekil 2.18'de gösterildiği gibi üstel fonksiyonunun limit durumu olarak ele alıp başlayalım. Bu durumda

$$x_n(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{n}} & t > 0 \\ -e^{\frac{t}{n}} & t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \tag{2.3.9}$$

Bu işaret için Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} X_n(f) &= \mathcal{F}[x_n(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{0} (-e^{\frac{t}{n}}) e^{-j2\pi ft}\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{n}} e^{-j2\pi ft}\,dt \\ &= -\int_{-\infty}^{0} e^{t(\frac{1}{n}-j2\pi f)}\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t(\frac{1}{n}+j2\pi f)}\,dt \\ &= -\frac{1}{\frac{1}{n} - j2\pi f} + \frac{1}{\frac{1}{n} + j2\pi f} \\ &= \frac{-j4\pi f}{\frac{1}{n^2} + 4\pi^2 f^2} \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

$n \to \infty$ durumunda

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] &= \lim_{n\to\infty} X_n(f) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-j4\pi f}{\frac{1}{n^2} + 4\pi^2 f^2} \\ &= \frac{1}{j\pi f} \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

elde edilir. *sgn(t)* ve tayfı Şekil 2.35'de gösterilmiştir. ■

Gerçel Çift ve Tek İşaretlerin Fourier Dönüşümü. Fourier dönüşümü genellikle

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)\,dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,dt \end{aligned}$$

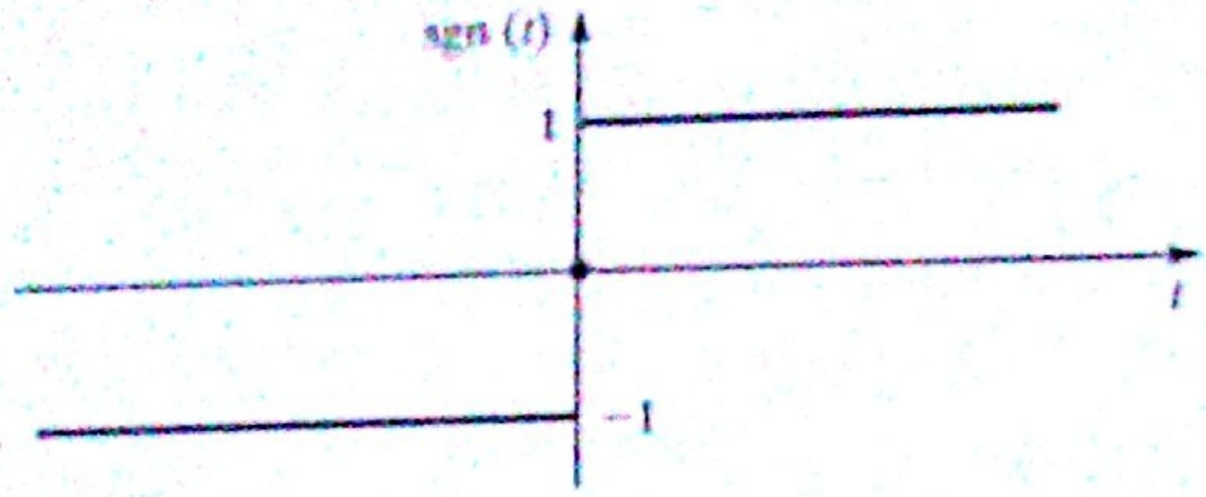
şeklinde yazılır. Gerçel $x(t)$ işareti için her iki entegral

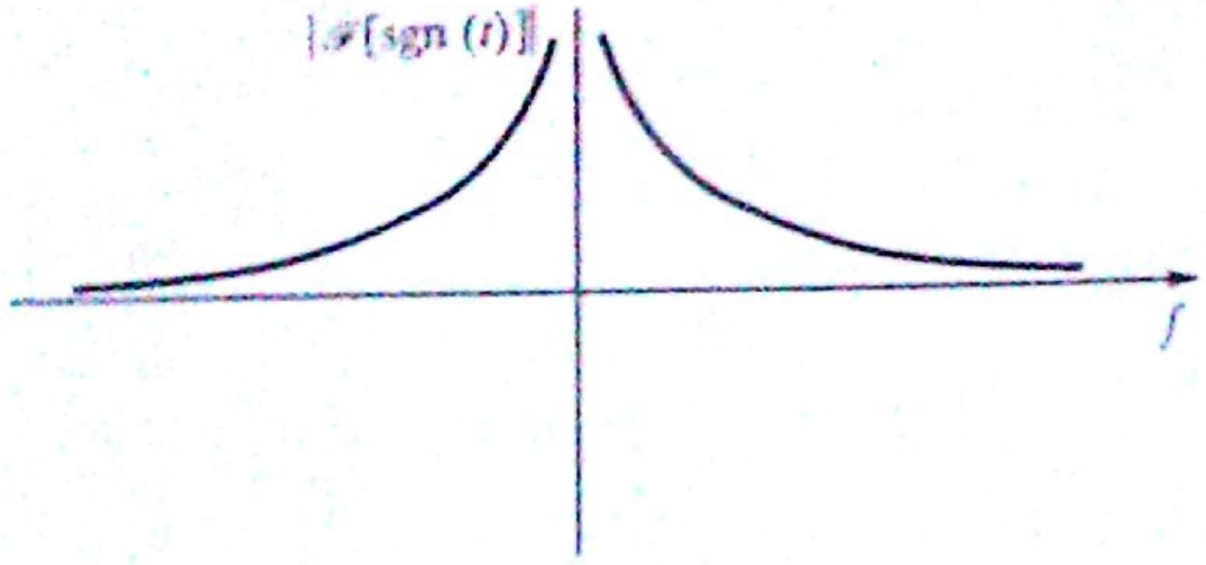
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)\,dt$$

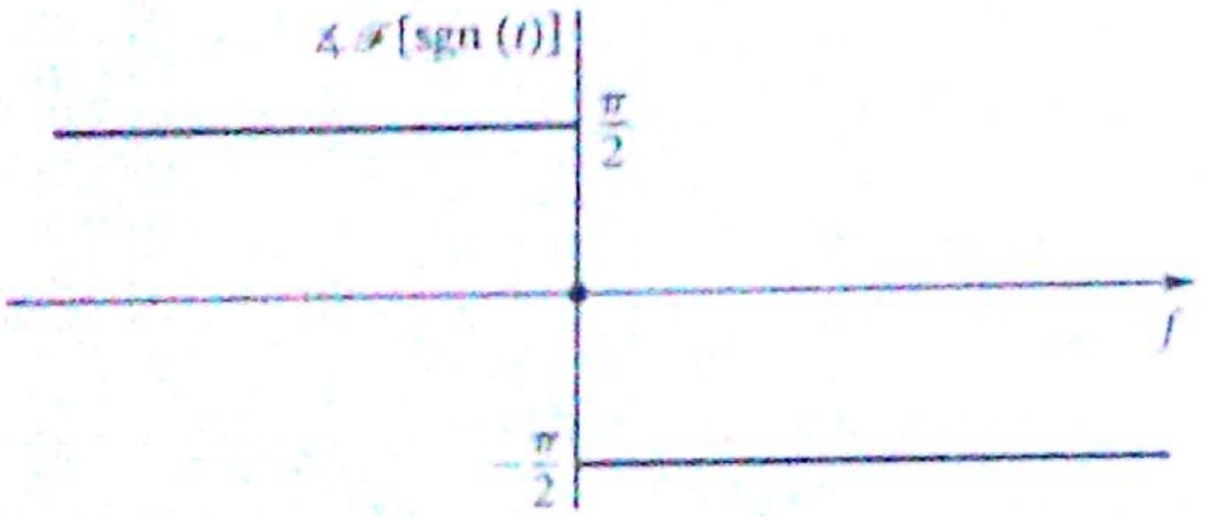
ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,dt$$

gerçektir. Dolayısı ile bunlar sırası ile $X(f)$'in gerçel ve sanal kısımlarını temsil eder. *Cosinus* çift bir fonksiyon ve *sinus* tek fonksiyon olduğundan, X(f)'in gerçel kısmı, eğer $x(t)$ gerçel ise, f in çift fonksiyonu ve sanal kısım ise f'*in* tek fonksiyonudur.







Şekil 2.35 Signum işareti ve işaretin tayfı

Bundan dolayı genellikle X(f) dönüşümü Hermitian bir fonksiyondur. Yani

$$X(-f) = X^*(f)$$

Bu ifade aşağıdaki eşitliklere denktir.

$$\mathrm{Re}[X(-f)] = \mathrm{Re}[X(f)]$$

$$\mathrm{Im}[X(-f)] = -\mathrm{Im}[X(f)]$$

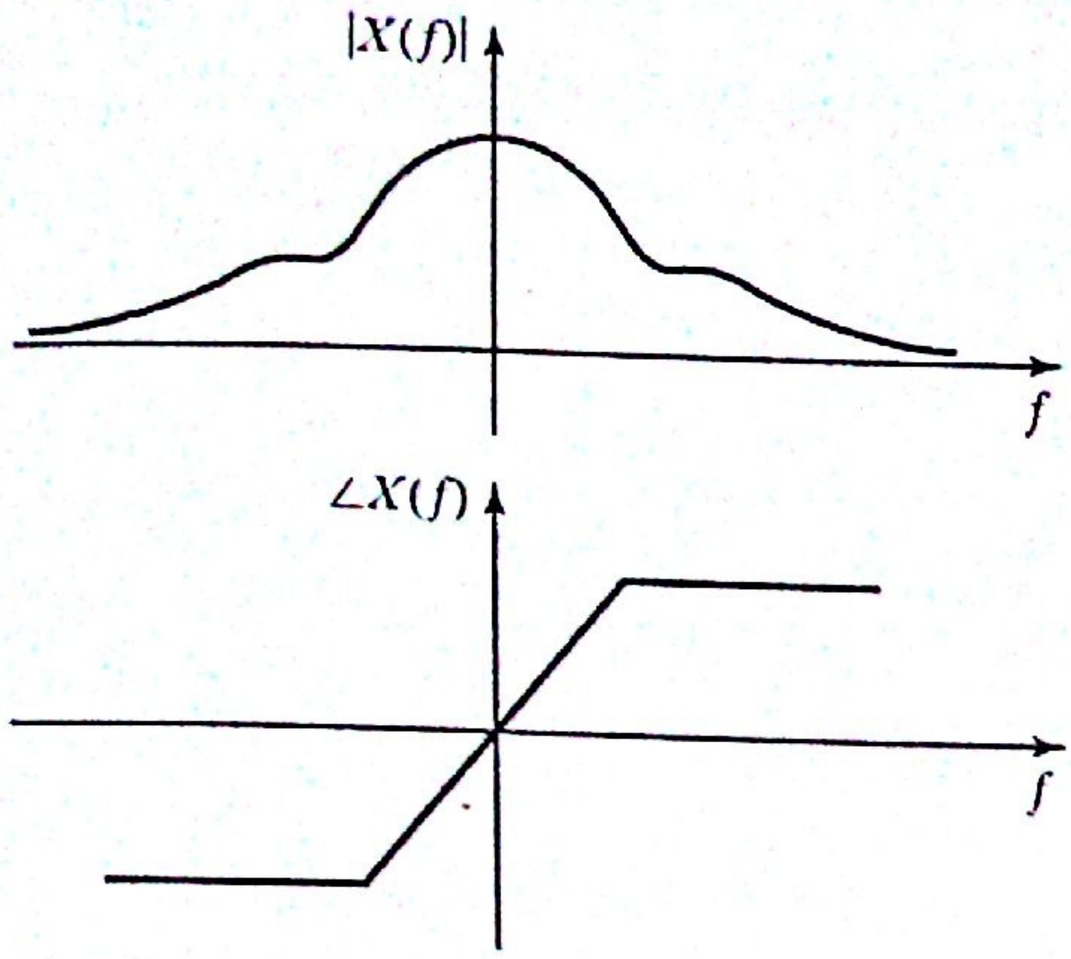
$$|X(-f)| = |X(f)|$$

$$\angle X(-f) = -\angle X(f)$$

Şekil 2.36'da bir $x(t)$ için tipik bir $|X(f)|$ ve $\angle X(f)$ gösterimi yapılmıştır.

Gerçel olmasının yanında eğer $x(t)$ aynı zamanda çift bir fonksiyon ise bu durumda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\,dt$$



Şekil 2.36 Bir gerçel işaretin genlik ve faz tayfı (spektrumu)

entegrali sıfır olur. Çünkü entegral içindeki terim bir çift fonksiyon ile bir tek fonksiyonun çarpımıdır ve bundan dolayı tek bir fonksiyondur. Dolayısı ile X(f) gerçel ve çift olacaktır. Benzer bir şekilde eğer $x(t)$ gerçel ve tek bir fonksiyon ise Fourier dönüşümün gerçel kısmı sıfır olacak ve $X(f)$ sanal ve tek bir fonksiyon olacaktır.

İşaret Bandgenişliği. Bir işaretin bandgenişliği işarette mevcut frekans aralığını temsil eder. Eğer bandgenişliği büyük ise bu durumda mevcut frekanslardaki değişim büyük olacaktır. Genel olarak bir gerçel işaretin bandgenişliği işarette mevcut *pozitif* frekans aralığı olarak tanımlanır. $x(t)$ işaretinin bandgenişliğini bulabilmek için öncelik ile $X(f)$ bulunur ve daha sonra $X(f)$ tarafından işgal edilen pozitif frekans aralığı bulunur. Bandgenişliği $BW=W_{max}-W_{min}$. şeklinde verilir ve burada W_{max} $X(f)'de$ mevcut en yüksek pozitif frekans iken W_{min} ise $X(f)'de$ mevcut en küçük pozitif frekanstır.

2.3.2 Fourier Dönüşümünün Temel Özellikleri

Bu bölümde Fourier dönüşümünün temel özellikleri elde edilecektir. Her bir özellik, bu özelliğin uygulandığı bir örnek ile ele alınacaktır.

Doğrusallık. Fourier dönüşümü doğrusal bir işlemdir. Yani eğer $x_1(t)$ *ve* $x_2(t)$ işaretlerinin Fourier dönüşümü sırası ile $X_1(f)$ *ve* $X_2(f)$ ise, $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü $\alpha X_1(f)+\beta X_2(f)$ olur. Burada α ve β (gerçel veya kompleks olabilen) rastgele bir sabittir. Bu özellik entegral işleminin doğrusallık özelliğinin doğrudan bir sonucudur.

Örnek 2.3.4

$u_{-1}(t)$ birim adım işaretinin Fourier dönüşümünü belirleyin.

Çözüm

$$u_{-1}(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{sgn}(t)=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\text{sgn}(t)$$

ilişkisini ve doğrusallık özelliğini kullanarak

$$\mathcal{F}[u_{-1}(t)] = \mathcal{F}[\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)]$$

$$= \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \tag{2.3.12}$$

■

elde edilir.

Çifteşlik (Duality). Eğer

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$$

ise bu durumda

$$x(f) = \mathcal{F}[X(-t)]$$

ve

$$x(-f) = \mathcal{F}[X(t)]$$

olur. Bu özelliği elde edebilmek için ters Fourier dönüşüm ilişkisi ele alınsın

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}dt$$

Daha sonra değişken dönüşümü kullanarak $u = -f$ için

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(-u)e^{-j2\pi ut}du.$$

elde edilir. t=f alarak

$$x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(-u)e^{-j2\pi uf}du$$

ve

$$x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(-t)e^{-j2\pi tf}dt$$

$$x(f) = \mathcal{F}[X(-t)] \tag{2.3.13}$$

elde edilir. Sonuç olarak *u yerine t* konursa

$$x(-f) = \mathcal{F}[X(t)] \tag{2.3.14}$$

elde edilir.

Örnek 2.3.5

sinc(f) işaretinin Fourier Dönüşümünü elde ediniz.

Çözüm $\Pi(t)$ çift fonksiyon olduğundan $\Pi(-f) = \Pi(f)$ olur ve çifteşlik teorisini kullanarak

$$\mathcal{F}[\text{sinc}(t)] = \Pi(-f) = \Pi(f) \tag{2.3.15}$$

■

elde edilir.

Örnek 2.3.6

$\frac{1}{t}$ işaretinin Fourier dönüşümünü elde ediniz.

Çözüm Örnek 2.3.3'de elde edilen dönüşüm çiftine

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{1}{j\pi f}$$

çifteşlik teorisi uygulanırsa $\mathcal{F}[\frac{1}{j\pi t}] = \text{sgn}(-f) = -\text{sgn}(f)$ elde edilir. Doğrusallık teoremini kullanarak

$$\mathcal{F}[\frac{1}{t}] = -j\pi\,\text{sgn}(f) \tag{2.3.16}$$

■

Zamanda Öteleme. Zamanda orijinden t_0 kadar bir öteleme frekans düzleminde fazda $-2\pi f t_0$ büyüklüğünde bir kaymaya neden olur. Diğer bir deyiş ile

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)] = e^{-j2\pi f t_0}\mathcal{F}[x(t)]$$

Bu ilişkiyi ispatlamak için $x(t-t_0)$'ın Fourier dönüşümü ele alınsın yani

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi f t}dt$$

$u = t - t_0$ değişken dönüşümü yapılır ise

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t-t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi f t_0}e^{-j2\pi f u}du \\ &= e^{-j2\pi f t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi f u}du \\ &= e^{-j2\pi f t_0}\mathcal{F}[x(t)]\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

elde edilir.

Zamanda öteleme yapılması dönüşümün genliğinde bir değişim oluşturmadığına dikkat edin. Bu öteleme sadece zaman ötelemesi oranında fazda bir öteleme oluşturur.

Örnek 2.3.7

Şekil 2.37'de gösterilen işaretinin Fourier dönüşümünü belirleyin.

Çözüm

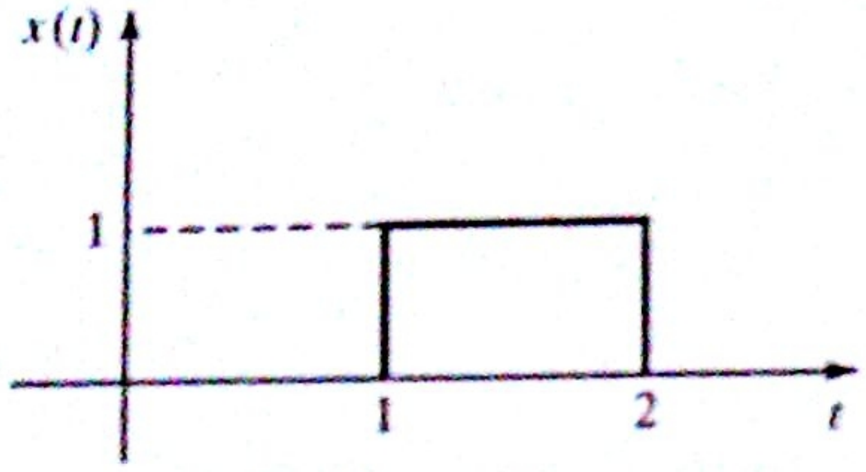
$$x(t) = \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right)$$

olduğundan öteleme teorisini kullanarak

$$\mathcal{F}[x(t)] = e^{-j2\pi f \times \frac{3}{2}} = e^{-j3\pi f}\,\text{sinc}(f) \tag{2.3.18}$$

■

elde edilir.



Şekil 2.37 $x(t)$ işareti

Örnek 2.38

Darbe katarı işaretinin Fourier dönüşümünü belirleyin.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

Çözüm Öteleme teorisini kullanarak

$$\mathcal{F}[\delta(t - nT_0)] = e^{-j2\pi f nT_0} \mathcal{F}[\delta(t)] = e^{-j2\pi f nT_0}$$

elde edilir. Dolayısı ile

$$\mathcal{F}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f nT_0}$$

olur. (2.2.14) denklemi kullanılarak

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

ve t yerine f, T_0 yerine $\frac{1}{T_0}$ yazılarak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f T_0} = T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n f T_0} \qquad (2.3.19)$$

ve

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n f T_0} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \qquad (2.3.20)$$

elde edilir. Bu ilişki kullanılarak

$$\mathcal{F}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)] = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \qquad (2.3.21)$$

yazılabilir. $T_0 = 1$ için elde edilecek sonuç ilginçtir. Bu durum için

$$\mathcal{F}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n) \qquad (2.3.22)$$

Yani t yerine f yazıldıktan sonra $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$ Fourier dönüşümü kendisine eşittir.

■

Ölçekleme. a gerçel sayı olmak üzere $a \neq 0$ için

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \tag{2.3.23}$$

olur. Bu eşitliği elde etmek için

$$\mathcal{F}[x(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j2\pi ft} dt \tag{2.3.24}$$

olduğuna dikkat edilmeli ve $u = at$ değişimi yapılmalıdır. Sonra

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(at)] &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi fu/a} du \\ &= \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

elde edilir. Yukarıda hem $a > 0$ ve hem de $a < 0$ durumları ayrı ayrı ele alınmıştır.

Yukarıdaki ifadede eğer $\alpha > 1$ ise $x(at)$ $x(t)'in$ sıkıştırılmış versiyonu, öte yandan $a < 1$ ise $x(at)$ $x(t)'in$ genleştirilmiş versiyonu olacağına dikkat edin. Dolayısı ile eğer zaman düzleminde işaret genleştirilmek istenir ise işaretin frekans düzlemi gösterimi (Yani Fourier dönüşümü) sıkıştırılır; eğer zaman düzleminde işareti sıkıştırır isek bu durumda frekans düzleminde genleştirme söz konusu olur. Bu gerçekten de bizim beklediğimiz bir durumdur. Çünkü zaman düzleminde işareti sıkıştırmak, işaretin çok daha ani değişim göstermesine neden olur ve bu da frekans içeriğinin genişlemesi anlamına gelecektir.

Örnek 2.3.9

$$x(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

İşaretinin Fourier dönüşümünü belirleyin.

Çözüm $x(t)$ işareti, 3 kat kuvvetlendirilmiş, 4 faktörü ile genleştirilmiş ve 2 birim sağa ötelenmiş bir dikdörtgen darbe işaretidir. Yani $x(t) = 3\Pi(\frac{t-2}{4})$ doğrusallık, zamanda öteleme ve ölçekleme özelliklerinden faydalanarak

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[3\Pi\left(\frac{t-2}{4}\right)] &= 3\mathcal{F}[\Pi\left(\frac{t-2}{4}\right)] \\ &= 3e^{-4j\pi f}\mathcal{F}[\Pi\left(\frac{t}{4}\right)] \\ &= 12e^{-4j\pi f}\operatorname{sinc}(4f) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Evrişim (Konvolüsyon) Eğer $x(t)$ ve $y(t)$ Fourier dönüşümüne sahip ise

$$\mathcal{F}[x(t) \star y(t)] = \mathcal{F}[x(t)] \cdot \mathcal{F}[y(t)] = X(f) \cdot Y(f) \tag{2.3.26}$$

olur.

Bu eşitliği ispatlamak için

$$\mathcal{F}[x(t) \star y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau \right] e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-j2\pi f (t-\tau)}\, dt \right] e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

elde edilir. $u = t - \tau$ değişken dönüşümü yapılarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-j2\pi f (t-\tau)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{-j2\pi f u} du$$

$$= \mathcal{F}[y(t)]$$

$$= Y(f)$$

Dolayısı ile

$$\mathcal{F}[x(t) \star y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) Y(f) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$= X(f) \cdot Y(f) \tag{2.3.27}$$

Bu teorem oldukça önemlidir ve kompleks üstel fonksiyonların DZD sistemlerin özfonksiyonu (veya aynı derecede evrişim işleminin özfonksiyonları) olmasının bir sonucudur. Bir DZD sistemin verilen bir girişe karşılık tepkisini belirlemek frekans düzleminde zaman düzlemine nazaran çok daha kolaydır. Yukarıda verilen bu teorem DZD sistemlerin frekans düzlemi analizinin temelini oluşturur.

Örnek 2.3.10

Şekil 2.15'de gösterilen $\Lambda(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Cevabın bulunabilmesi için bu fonksiyonun $\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$ olduğunu görebilmek ve evrişim teorisini kullanmak yeterlidir. Dolayısı ile

$$\mathcal{F}[\Lambda(t)] = \mathcal{F}[\Pi(t)] \cdot \mathcal{F}[\Pi(t)] = \text{sinc}^2(f) \tag{2.3.28}$$

elde edilir. ■

Örnek 2.3.11

Şekil 2.16'da verilen ve Örnek 2.1.14'de incelenen $x(t) = \Pi(\frac{t}{4}) + \Lambda(\frac{t}{2})$ işaretinin Fourier dönüşümünü belirleyin.

Çözüm Ölçekleme ve doğrusallık özelliklerini kullanarak

$$X(f) = 4\text{sinc}(4f) + 2\text{sinc}^2(2f)$$

elde ederiz. ■

Modülasyon $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$ ifadesinin Fourier dönüşümü $X(f - f_0)$ dir. Bu ilişki şu şekilde gösterilebilir.

$$\mathcal{F}[x(t)e^{j2\pi f_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi t (f - f_0)} dt$$

$$= X(f - f_0) \tag{2.3.29}$$

Bu teorem zamanda öteleme teoreminin karşılıklı eşidir. Zamanda öteleme teoremi zaman düzleminde öteleme işleminin frekans düzleminde bir kompleks üstel ile çarpıma karşılık geldiğini ifade eder. Modulasyon teoremi ise zaman düzleminde bir kompleks üstel ile çarpımın, frekans düzleminde bir ötelemeye neden olduğunu ifade eder. Frekans düzleminde yapılan öteleme genellikle modülasyon olarak adlandırılır.

Örnek 2.3.12

$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ işaretinin Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm Modulasyon teoreminin kullanılması ile

$$\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] = \mathcal{F}[1e^{j2\pi f_0 t}]$$
$$= \delta(f - f_0)$$

elde edilir. Burada $x(t)$ gerçel bir işaret olmadığı için, bu işaretin Fourier dönüşümün Hermitian simetriye sahip olmadığına dikkat edin (Yani genlik çift simetriye ve faz tek simetriye sahip değildir.) ■

Örnek 2.3.13

$\cos(2\pi f_0 t)$ işaretinin Fourier dönüşümünü bulun.

Çözüm Euler eşitliğini kullanarak $\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}e^{j2\pi_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$ yazılabilir. Bu durumda doğrusallık özelliğini ve Örnek 2.3.12'nin sonucunu kullanarak

$$\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t}]$$
$$= \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$ ■

elde edilir.

Örnek 2.3.14

$x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ işaretinin Fourier dönüşümünü elde ediniz.

Çözüm Yukarıdaki örneklerden elde edilen sonuçlardan hareket ile

$$\mathcal{F}[x(t)\cos(2\pi f_0 t)] = \mathcal{F}[\frac{1}{2}x(t)e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j2\pi f_0 t}]$$
$$= \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0) \qquad (2.3.30)$$

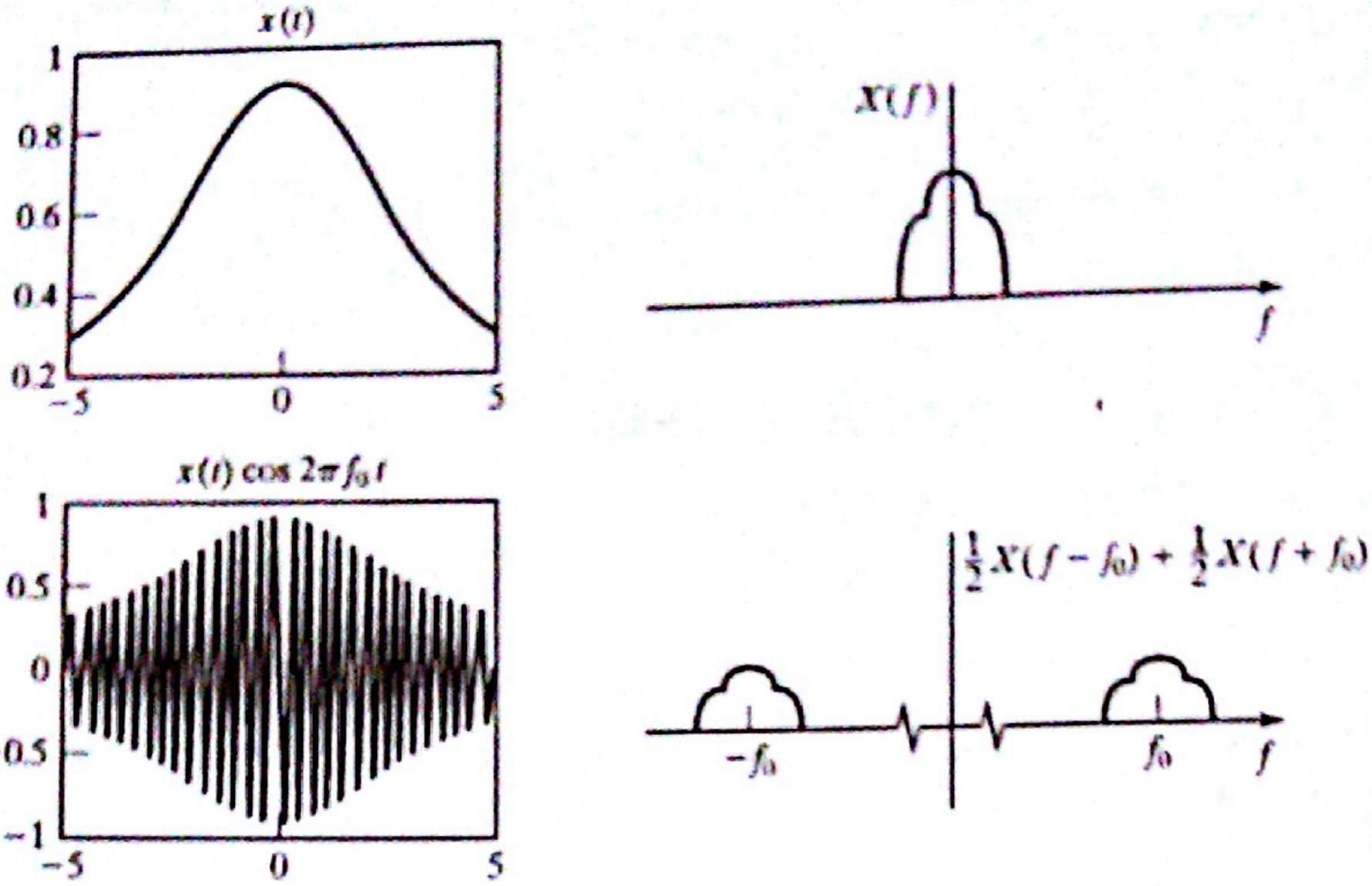
bulunur. Şekil 2.38 bu ilişkiyi grafiksel olarak göstermektedir. Bölüm 3'de bu ilişkinin genlik modülasyonlu sistemlerin temelini oluşturduğunu göreceğiz.

Örnek 2.3.15

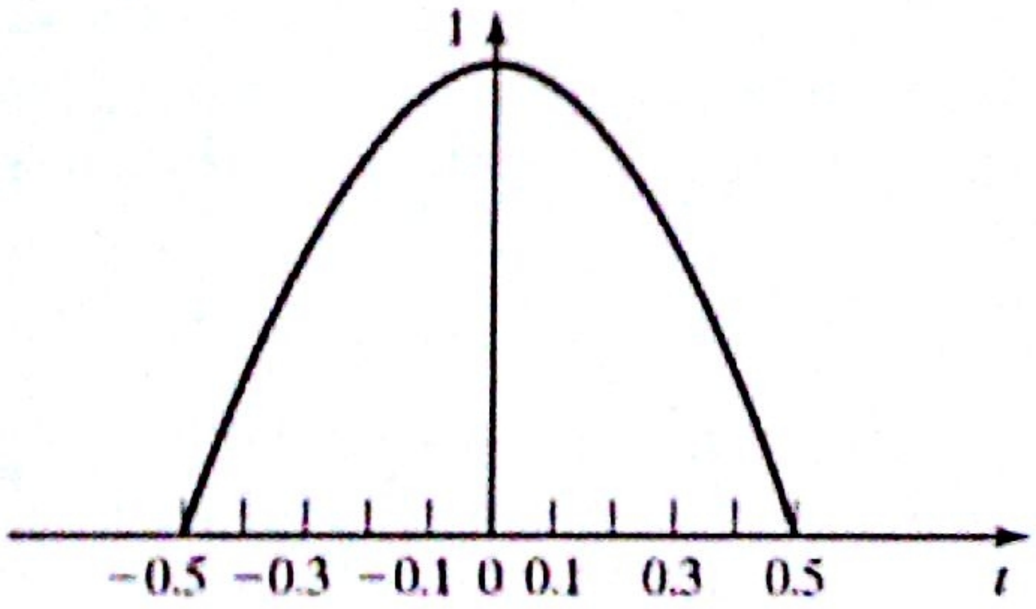
Şekil 2.39'da gösterilen

$$x(t) = \begin{cases} \cos(\pi t) & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad (2.3.31)$$

işaretinin Fourier dönüşümünü bulunuz.



Şekil 2.38. Modülasyon işleminin zaman ve frekans düzlemindeki etkisi



Şekil 2.39 $x(t)$ **işareti**

Çözüm $x(t)$ **işaretinin**

$$x(t) = \Pi(t)\cos(\pi t) \tag{2.3.32}$$

şeklinde ifade edilebileceğine dikkat edin.
Bundan dolayı

$$\mathcal{F}[\Pi(t)\cos(\pi t)] = \frac{1}{2}\text{sinc}\left(f - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\text{sinc}\left(f + \frac{1}{2}\right) \tag{2.3.33}$$

olur. Bu ifadenin elde edilmesinde Örnek 2.3.14'ün sonucu $f_0 = \frac{1}{2}$ alınarak kullanılmıştır. ■

Parseval İlişkisi. Eğer $x(t)$ ve $y(t)$ işaretlerinin Fourier dönüşümü sırası ile $X(f)$ ve $Y(f)$ ise bu durumda

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)\,df \tag{2.3.34}$$

olur. Parseval ilişkisini ispat etmek için

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(f')e^{j2\pi f't}df'\right]^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(f')e^{-j2\pi f't}df'\right]dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\left[\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(f')\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi t(f-f')}\,dt\right]df'\right]df\end{aligned}$$

olduğuna dikkat edelim. (2.3.5) denklemini kullanarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi t(f-f')}dt = \delta(f-f')$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\left[\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(f')\delta(f-f')\,df'\right]df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)\,df \qquad (2.3.35)\end{aligned}$$

olur. Burada dürtü işaretinin eleme özelliği son adımda kullanılmıştır.

Eğer $y(t)=x(t)$ alınır ise

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df \qquad (2.3.36)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç *Rayleigh teoremi* olarak bilinir ve periyodik işaretler için elde edilen Parseval teoremine benzerlik gösterir.

Örnek 2.3.16

Parseval teoremini kullanarak,

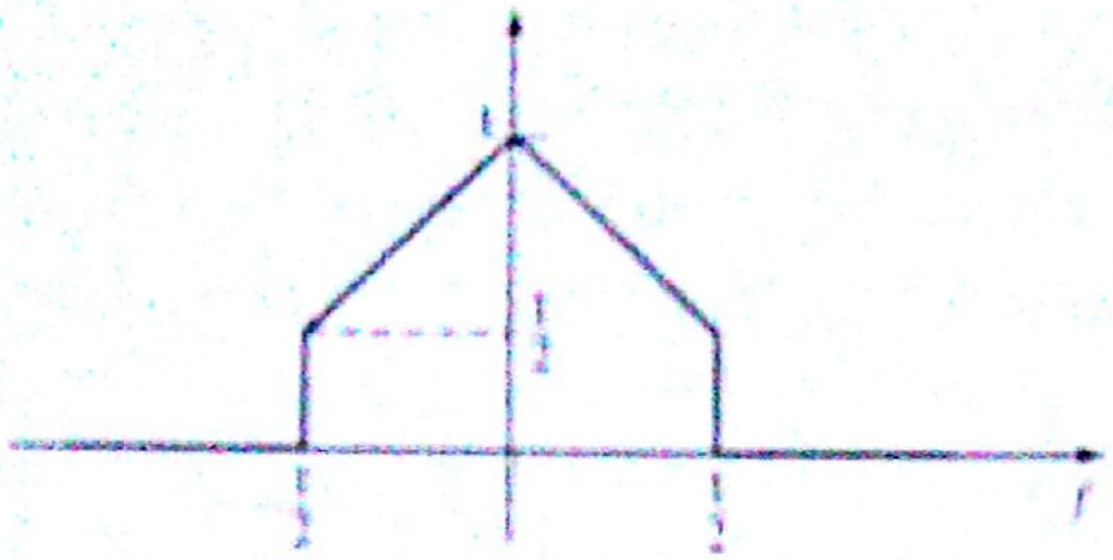
$$\int_{-\infty}^{\infty}\text{sinc}^4(t)\,dt \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\text{sinc}^3(t)\,dt$$

entegrallerinin sonucunu bulunuz.

Çözüm $\mathcal{F}[\text{sinc}^2(t)] = \Lambda(t)$ olduğunu biliyoruz. Dolayısı ile Rayleigh teoremini kullanarak

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\text{sinc}^4(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\Lambda^2(f)\,df \\ &= \int_{-1}^{0}(f+1)^2df + \int_{0}^{1}(-f+1)^2df \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 2.40 Π ve Λ çarpımı

İkinci entegral için ise, $\mathcal{F}[\text{sinc}(t)] = \Pi(f)$ eşitliğinden hareket ile Parseval teoremini kullanarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(t)\text{sinc}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(f)\Lambda(f)\,df$$

yazılabilir.

Şekil 2.40 $\Pi(f)$ ve $\Lambda(f)$ çarpımlarını göstermektedir. Bu şekilden,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(f)\Lambda(f)\,df = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

olduğu görülebilir. Dolayısı ile

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^3(t)\,dt = \frac{3}{4}$$

sonucu elde edilir. ■

Özilişki. Bir $x(t)$ işaretin *(zaman) özilişki fonksiyonu* $R_x(\tau)$ ile gösterilir ve

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)\,dt \tag{2.3.37}$$

şeklinde tanımlanır. Özilişki teoremi

$$\mathcal{F}[R_x(\tau)] = |X(f)|^2 \tag{2.3.38}$$

olduğunu ifade eder. Burada $R_x(\tau) = x(\tau) \star x^*(-\tau)$ olduğuna dikkat ediniz. Evrişim teoremini kullanarak özilişki teoremi kolaylıkla gösterebilir.[6]

Bu teoremden hareket ile özilişki fonksiyonunun Fourier dönüşümünün her zaman gerçel değerli, pozitif bir fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz.

Türev. Bir işaretin türevinin Fourier dönüşümü aşağıdaki ilişkiden hareket ile bulunabilir.

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = j2\pi f X(f) \tag{2.3.39}$$

---

[6] Rastgele işaretler için özilişki fonksiyonunun tanımı Bölüm 5'te verilecektir.

Bu ilişki şu şekilde gösterilebilir:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} j2\pi f X(f)e^{j2\pi ft}df \qquad (2.3.40)$$

Dolayısı ile

$$\mathcal{F}^{-1}[j2\pi f X(f)] = \frac{d}{dt}x(t)$$

olduğu veya

$$\mathcal{F}[\frac{d}{dt}x(t)] = j2\pi f X(f)$$

olduğu gösterilmiş olunur. Türev teoreminin tekrarlı uygulaması sonucunda ise

$$\mathcal{F}[\frac{d^n}{dt^n}x(t)] = (j2\pi f)^n X(f) \qquad (2.3.41)$$

elde edilir.

Örnek 2.3.17

Şekil 2.41'de gösterilen işaretin Fourier dönüşümünü belirleyin.

Çözüm Bu işaret $x(t) = \frac{d}{dt}\Lambda(t)$ olarak ifade edilebilir. Dolayısı ile türev teoremini uygulayarak

$$\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[\frac{d}{dt}\Lambda(t)]$$
$$= j2\pi f\,\mathcal{F}[\Lambda(t)]$$
$$= j2\pi f\,\text{sinc}^2(f) \qquad (2.3.42)$$

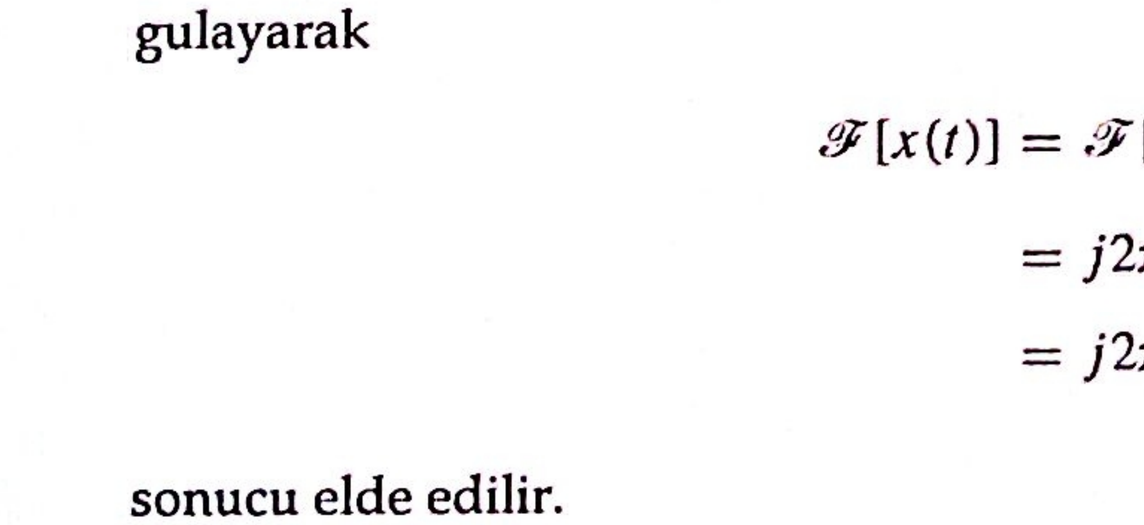
■

sonucu elde edilir.

Frekans Düzleminde Türev

$$\mathcal{F}[tx(t)] = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f) \qquad (2.3.43)$$

eşitliği ile başlar isek



Şekil 2.41. $x(t)$ **işareti**

Bu ilişkinin ispatı zaman düzleminde türev teoreminin ispatı ile aynıdır ve bundan dolayı okuyucuya egzersiz olarak bırakılmıştır. Bu teoremin çoklu uygulaması ise

$$\mathcal{F}[t^n x(t)] = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{df^n} X(f) \tag{2.3.44}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Örnek 2.3.18

$x(t)=t$ işaretinin Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[t] &= \mathcal{F}[t \times 1] \\ &= \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\mathcal{F}[1] \\ &= \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\delta(f) \\ &= \frac{j}{2\pi}\delta'(f)\end{aligned} \tag{2.3.45}$$

şeklinde bulunur.

Entegral Bir işaretin entegralinin Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right] = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f) \tag{2.3.46}$$

ilişkisi ile bulunur. Bu ilişkinin ispatı için, Problem 2.15'in sonucu

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = x(t) \star u_{-1}(t)$$

ifadesini elde etmek için kullanılabilir. Şimdi evrişim teoremini ve $u_{-1}(t)$ işaretinin Fourier dönüşümünü kullanarak

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right] &= X(f)\left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)\right] \\ &= \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)\end{aligned} \tag{2.3.47}$$

elde edilir.

Örnek 2.3.19

Şekil 2.42'de verilen işaretin Fourier dönüşümünü elde ediniz.

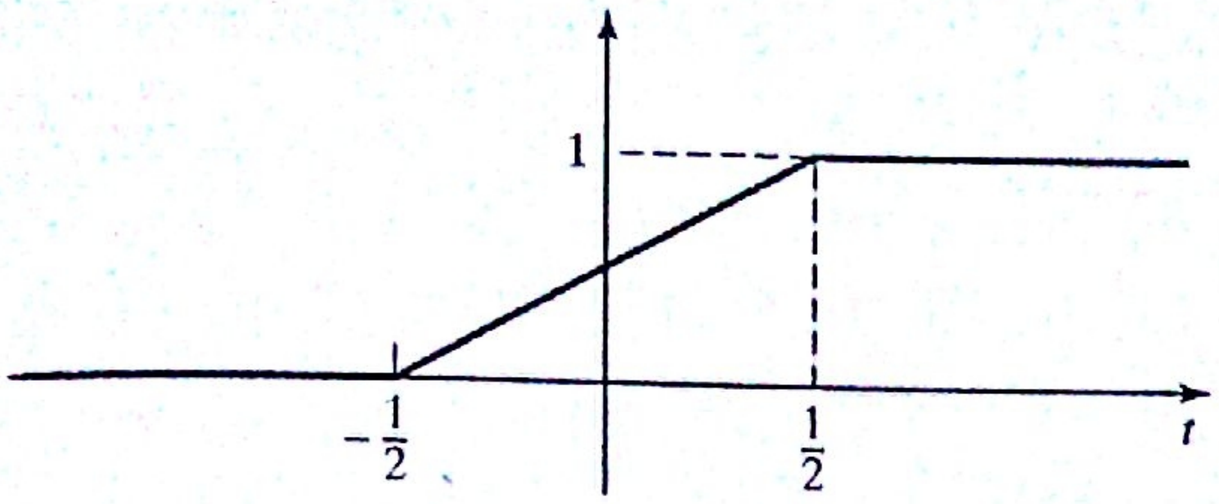
Çözüm İşaretin

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \Pi(\tau)\,d\tau$$

olduğuna dikkat edin. Dolayısı ile entegral teoremi kullanılarak

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t)] &= \frac{\text{sinc}(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\text{sinc}(0)\delta(f) \\ &= \frac{\text{sinc}(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)\end{aligned} \tag{2.3.48}$$

■



Şekil 2.42. $x(t)$ işareti

Momentler. Eğer $\mathcal{F}[x(t)] = X(f)$ ise bu durumda $\int_{-\infty}^{\infty} t^n x(t)\,dt$ yani $x(t)$'in *n. momenti* aşağıdaki ilişki yardımı ile elde edilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n x(t)\,dt = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{df^n} X(f)\bigg|_{f=0} \tag{2.3.49}$$

Bu ilişki frekans düzleminde türev özelliği kullanılarak kolaylıkla gösterilebilir.

$$\mathcal{F}[t^n x(t)] = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{df^n} X(f) \tag{2.3.50}$$

olduğuna göre bunun anlamı

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{df^n} X(f)$$

olmasıdır. Burada eşitliğin her iki tarafında $f = 0$ alınır ise istenen sonuç elde edilmiş olunur. $n = 0$ özel durumu için bir işaretin altında kalan alanı veren aşağıdaki basit ilişki elde edilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = X(0) \tag{2.3.51}$$

Örnek 2.3.20

$\alpha > 0$ ve $x(t) = e^{-\alpha t} u_{-1}(t)$ ise $x(t)$ işaretinin *n. momentini* bulunuz.

Çözüm İlk olarak $X(f)$ bulunsun.

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} u_{-1}(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-t(\alpha + j2\pi ft)} dt \\ &= -\frac{1}{\alpha + j2\pi f}(0 - 1) \\ &= \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \end{aligned} \tag{2.3.52}$$

n kere türev uygulanır ise

$$\frac{d^n}{df^n}X(f) = \frac{(-j2\pi)^n}{(\alpha + j2\pi f)^{n+1}} \tag{2.3.53}$$

elde edilir. Dolayısı ile

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-\alpha t} u_{-1}(t)\, dt = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n (-j2\pi)^n \cdot \frac{1}{\alpha^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{n+1}} \tag{2.3.54}$$

■

olur.

Örnek 2.3.21

$x(t) = e^{-\alpha|t|}$ işaretinin Fourier dönüşümünü $\alpha > 0$ için bulunuz (Şekil 2.43'e bakınız)

Çözüm

$$x(t) = e^{-\alpha t}u_{-1}(t) + e^{\alpha t}u_{-1}(-t) = x_1(t) + x_1(-t) \tag{2.3.55}$$

ilişkisinden ve

$$\mathcal{F}[x_1(t)] = \mathcal{F}[e^{-\alpha t}u_{-1}(t)] = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

olmasından hareket ile $\alpha = -1$ alarak, ölçekleme teoremi uygulanır ise

$$\mathcal{F}[x_1(-t)] = \mathcal{F}[e^{\alpha t}u_{-1}(-t)] = \frac{1}{\alpha - j2\pi f}$$

sonucu elde edilir. Dolayısı ile doğrusallık özelliğinden

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha|t|}] = \frac{1}{\alpha + j2\pi f} + \frac{1}{\alpha - j2\pi f}$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \tag{2.3.56}$$

■

elde ederiz.

Şekil 2.43 $e^{-\alpha|t|}$ **işareti ve Fourier dönüşümü**

TABLO 2.1 FOURİER DÖNÜŞÜM ÇİFTLERİ

Zaman Düzlemi	Frekans Düzlemi
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$-\frac{1}{2j}\delta(f+f_0)+\frac{1}{2j}\delta(f-f_0)$
$\Pi(t)$	$\mathrm{sinc}(f)$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\Pi(f)$
$\Lambda(t)$	$\mathrm{sinc}^2(f)$
$\mathrm{sinc}^2(t)$	$\Lambda(f)$
$e^{-\alpha t}u_{-1}(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha+j2\pi f}$
$te^{-\alpha t}u_{-1}(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{(\alpha+j2\pi f)^2}$
$e^{-\alpha\lvert t\rvert}$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$u_{-1}(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
$\delta'(t)$	$j2\pi f$
$\delta^{(n)}(t)$	$(j2\pi f)^n$
$\frac{1}{t}$	$-j\pi\,\mathrm{sgn}(f)$
$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$

Tablo 2.1 çok sık kullanılan bazı işaretlerin Fourier dönüşüm çiftlerini vermektedir. Tablo 2.2 ise Fourier dönüşümün temel özelliklerini sıralamaktadır.

2.2.3. Periyodik İşaretlerin Fourier Dönüşümü

Bu altbölümde, şu ana kadar elde etmiş olduğumuz sonuçları periyodik işaretlerin Fourier dönüşümünü bulacak şekilde genişleteceğiz. Bu aşamaya kadar zaten bazı periyodik işaretlerin Fourier Dönüşümleri elde edildi. (Tablo 2.1'e bakınız). Bu işaretler $e^{j2\pi f_0 t}, \cos(2\pi f_0 t), \sin(2\pi f_0 t), \sin(2\pi f_0 t)$ ve $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta(t-nT_0)$ şeklinde sıralanabilir. Tüm bu periyodik işaretlerin Fourier dönüşümleri ortak bir özelliğe sahiptir:

TABLO. 2.2. FOURİER DÖNÜŞÜM ÖZELLİKLERİ

İşaret	Forier Dönüşümü
$ax_1(t) + \beta x_2(t)$	$aX_1(f) + \beta X_2(f)$
$X(t)$	$x(-f)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$x(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}X(f)$
$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f - f_0)$
$x(t) * y(t)$	$X(f)Y(f)$
$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$j2\pi f X(f)$
$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$(j2\pi f)^n X(f)$
$tx(t)$	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{d}{df}X(f)$
$t^n x(t)$	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{df^n}X(f)$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$

Bu işaretlerin Fourier dönüşümleri frekans düzleminde dürtü fonksiyonu içermektedir. Bu altbölümde, bu özelliğin tüm periyodik işaretler için geçerli olduğunu göstereceğiz; gerçekten de periyodik işaretlerin Fourier açılımı ile Fourier dönüşümleri arasında yakın bir ilişki mevcuttur.

$x(t)$ T_0 periyoduna sahip bir periyodik işaret olsun. $\{x_n\}$ bu işaretin Fourier seri katsayılarını göstersin. Bu durumda

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0}t}$$

olur. Her iki tarafın Fourier dönüşümü alınır ise ve

$$\mathcal{F}[e^{j2\pi \frac{n}{T_0}t}] = \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

eşitliği kullanılır ise

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \tag{2.3.57}$$

sonucu elde edilir ki bu sonuç periyodik bir işaretin Fourier dönüşümünün, bu işaretin temel frekansının katlarındaki frekanslarda (harmonik frekanslarda) dürtü dizisine sahip olacağını göstermektedir.

Bu dürtü dizisi işaretin Fourier seri katsayıları ile ağırlıklandırılmıştır. Bu ilişki bize bir işaretin Fourier seri katsayılarını, Fourier dönüşüm özelliklerini kullanarak kolayca hesaplama imkânı sunmaktadır. Eğer pencerelenmiş bir $x_{T_0}(t)$ işaretini

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T_0}{2} < t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.3.58}$$

şeklinde tanımlarsak

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{T_0}(t - nT_0) \tag{2.3.59}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda $x_{T_0}(t - nT_0) = x_{T_0}(t) \star \delta(t - nT_0)$ olduğuna dikkat edersek

$$x(t) = x_{T_0}(t) \star \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \tag{2.3.60}$$

yazılabilir. Dolayısı ile evrişim teoremini ve Tablo 2.1 kullanılarak

$$X(f) = X_{T_0}(f)\left[\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)\right] \tag{2.3.61}$$

elde edilir ve bu son ifade

$$X(f) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right)\delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \tag{2.3.62}$$

şeklinde basitleştirilir. Elde edilen bu sonuç ile

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \tag{2.3.63}$$

kıyaslanırsa

$$x_n = \frac{1}{T_0} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right) \tag{2.3.64}$$

olduğu görülür. Bu denklem Fourier seri katsayılarının hesaplanabilmesi için alternatif bir yaklaşım sunmaktadır.

Verilen bir $x(t)$ periyodik işareti için, x_n katsayıları aşağıdaki adımlar takip edilerek bulunur:

1. İlk olarak, denklem (2.3.58) kullanılarak $x_{T_0}(t)$ belirlenir.
2. Daha sonra, bu işaretin Fourier dönüşümü Tablo 2.1 ve Fourier dönüşüm özellikleri kullanılarak belirlenir.
3. Son olarak bu işaretin Fourier dönüşümünün değeri $f = \frac{n}{T_0}$ frekanslarında bulunur ve denklem (2.3.64)'de gösterildiği gibi $\frac{1}{T_0}$ katsayısı ile ölçeklendirilir.

Örnek 2.3.22

Şekil 2.25'de verilen $x(t)$ işaretinin Fourier seri katsayılarını bulunuz.

Çözüm Yukarıda verilen adımlar takip edilir ise; pencerelenmiş işaret

$$x_{T_0}(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

olur ve bunun Fourier dönüşümü

$$X_{T_0}(f) = \tau \text{sinc}(\tau f)$$

olarak bulunur. Dolayısı ile aranan katsayılar için

$$x_n = \frac{\tau}{T_0}\text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)$$

elde edilir.

2.3.4 DZD Sistemler Üzerinden İletim

Evrişim teoremi DZD sistemlerin frekans düzleminde incelenmesinde kullanılan temel ilişkidir. Bir DZD sistemin çıkışının, sistem girişi ile sistemin dürtü tepkisinin evrişimine eşit olduğu daha önceki bölümlerde gösterilmişti. Eğer bu ilişki evrişim teorisi kullanılarak frekans düzlemine taşınır ise $X(f)$, $Y(f)$ *ve* $H(f)$ sırası ile girişin, çıkışın ve dürtü tepkisinin Fourier dönüşümleri olmak üzere

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

yazılabilir. Dolayısı ile bir DZD sistemin frekans düzleminde verilen giriş-çıkış ilişkisi zaman düzleminde verilen ilişkiye nazaran daha basittir. Zaman düzleminde evrişim entegrali ile karşı karşıya kalır iken, frekans düzleminde basit bir çarpma işlemi karşımıza çıkar. Bu basitleştirme işaretlerin Fourier dönüşümlerinin DZD sistemin özfonksiyonları cinsinden ifade ediliyor olmalarından kaynaklanır. Dolayısı ile verilen bir girişe karşın sistem çıkışının belirlenebilmesi için giriş işaretinin ve sistem dürtü tepkisinin Fourier dönüşümü belirlenmelidir. Çıkışın zaman düzlemi ifadesinin bulunabilmesi için ise elde edeceğimiz sonucun ters Fourier dönüşümü bulunmalıdır. Birçok durumda, ters Fourier dönüşümünün bulunması gerekmeyebilir. Genellikle çıkışın Fourier dönüşümü çıkış hakkında yeterli bilgiyi sunar.

Örnek. 2.3.23

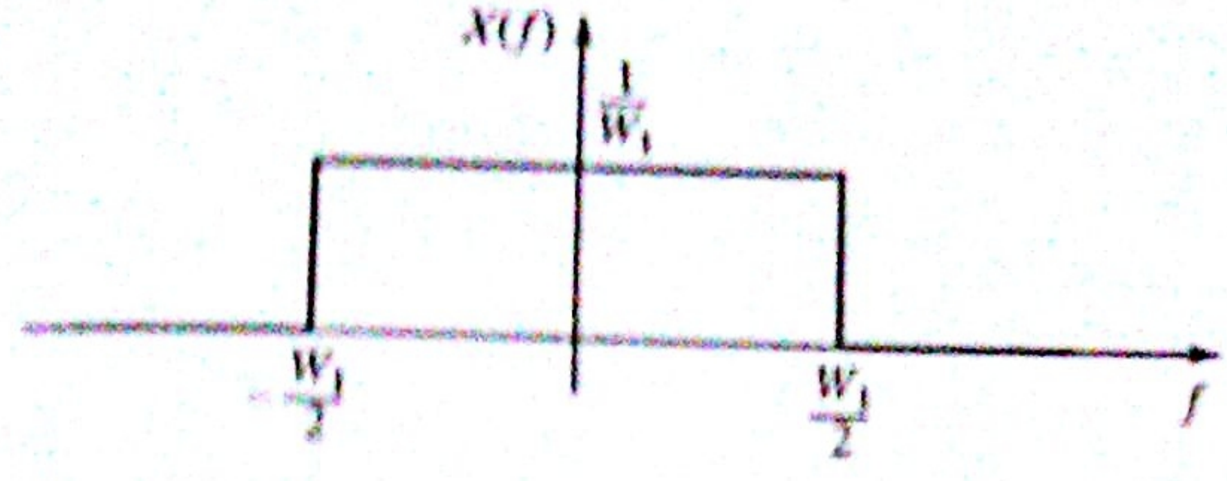
Bir DZD sistem girişinin

$$x(t) = \text{sinc}(W_1 t)$$

ve sistem dürtü tepkisinin

$$h(t) = \text{sinc}(W_2 t)$$

olduğunu kabul edersek sistem çıkışı belirleyin.



Şekil 2.44 Alçak geçiren işaret ve alçak geçiren süzgeç

Çözüm İlk olarak, işaretleri frekans düzlemine taşıyalım. Sonuç olarak

$$X(f) = \frac{1}{W_1}\Pi\left(\frac{f}{W_1}\right)$$

ve

$$H(f) = \frac{1}{W_2}\Pi\left(\frac{f}{W_2}\right)$$

elde edilir. Şekil 2.44. *X(f) ve H(f)'i* **göstermektedir. Frekans düzleminde çıkışı elde etmek için,**

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f)H(f) \\ &= \frac{1}{W_1 W_2}\Pi\left(\frac{f}{W_1}\right)\Pi\left(\frac{f}{W_2}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{W_1 W_2}\Pi\left(\frac{f}{W_1}\right) & W_1 \le W_2 \\ \frac{1}{W_1 W_2}\Pi\left(\frac{f}{W_2}\right) & W_1 > W_2 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.3.65}$$

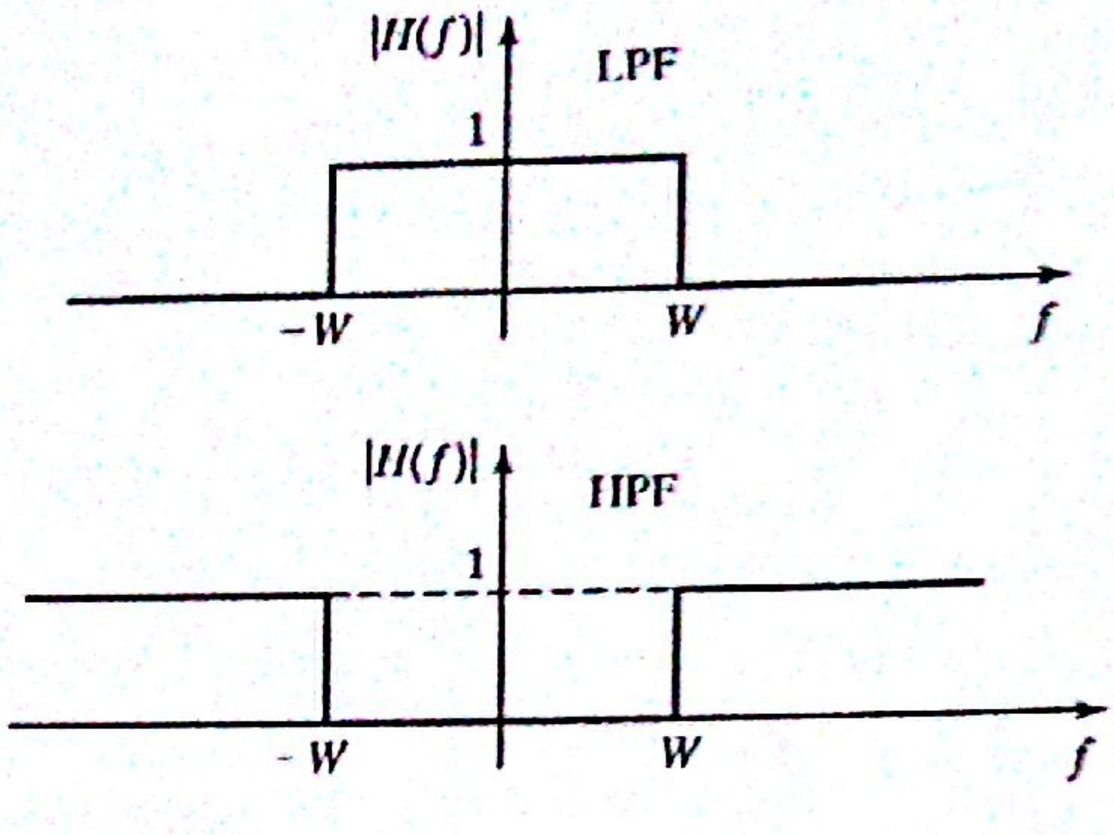
bu sonuçtan hareket ile

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{W_2}\text{sinc}(W_1 t) & W_1 \le W_2 \\ \frac{1}{W_1}\text{sinc}(W_2 t) & W_1 > W_2 \end{cases}$$

■

elde edilir.

Yukarıdaki örnekte ele alınan $x(t)$ işareti gibi işaretler *alçak geçiren (lowpass)* işaret olarak adlandırılır. Bu tür işaretler, frekans düzlemi gösterimlerinde sadece sıfır frekansı etrafındaki frekansları içeren ve W_1 değerinin üzerinde frekans içermeyen işaretlerdir. Benzer bir şekilde bir W frekansından daha küçük frekansları iletir iken bu değerin üzerindeki frekansları geçirmeyen bir DZD sistem *ideal alçakgeçiren süzgeç* olarak isimlendirilir. Bir ideal alçak geçiren süzgeç $-W \le f \le W$



Şekil 2.45 Farklı süzgeç tipleri

Frekans aralığı için 1 olan bir frekans tepkisine sahip iken, bu aralığın dışındaki frekanslar için frekans tepkisi 0 olur. *W* süzgecin *bandgenişliği* olarak isimlendirilir. Benzer bir şekilde *ideal yüksek geçiren süzgeç* tanımlanabilir. Yüksek geçiren süzgeç için, $H(f)$ $-W \le f \le W$ aralığında sıfır iken bu aralığın dışında bir değerine sahiptir. *İdeal bandgeçiren süzgeç* ise $W_1 \le |f| \le W_2$ aralığında bir değerine sahip iken bu aralığın dışında sıfırdır. Bu durumda süzgecin bandgenişliği $W_2 - W_1$ olarak verilir. Şekil 2.45. farklı süzgeç tiplerinin frekans tepkilerini göstermektedir.

İdeal olmayan alçak geçiren ve bandgeçiren süzgeçler için bandgenişliği süzgeç güç iletim oranı, maksimum güç iletim oranının en azından yarısı olduğu frekans bandı olarak tanımlanmaktadır. Bu bandgenişliği genellikle 3 dB bandgenişliği olarak adlandırılır. Çünkü gücün yarıya düşürülmesi logaritmik skalada 3 dB düşüşe karşılık gelmektedir. Şekil 2.46 süzgeçler için 3 dB bandgenişliğini göstermektedir.

Burada bandgenişliğinin bir süzgecin ilettiği *pozitif frekans* kümesi olduğunu hatırlatmakta fayda vardır.

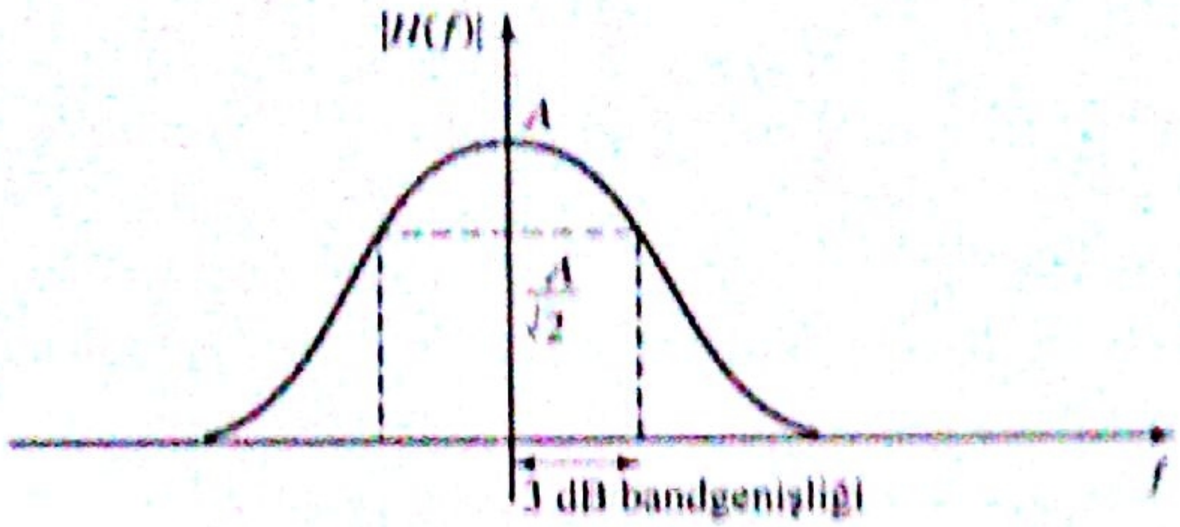
Örnek 2.3.24

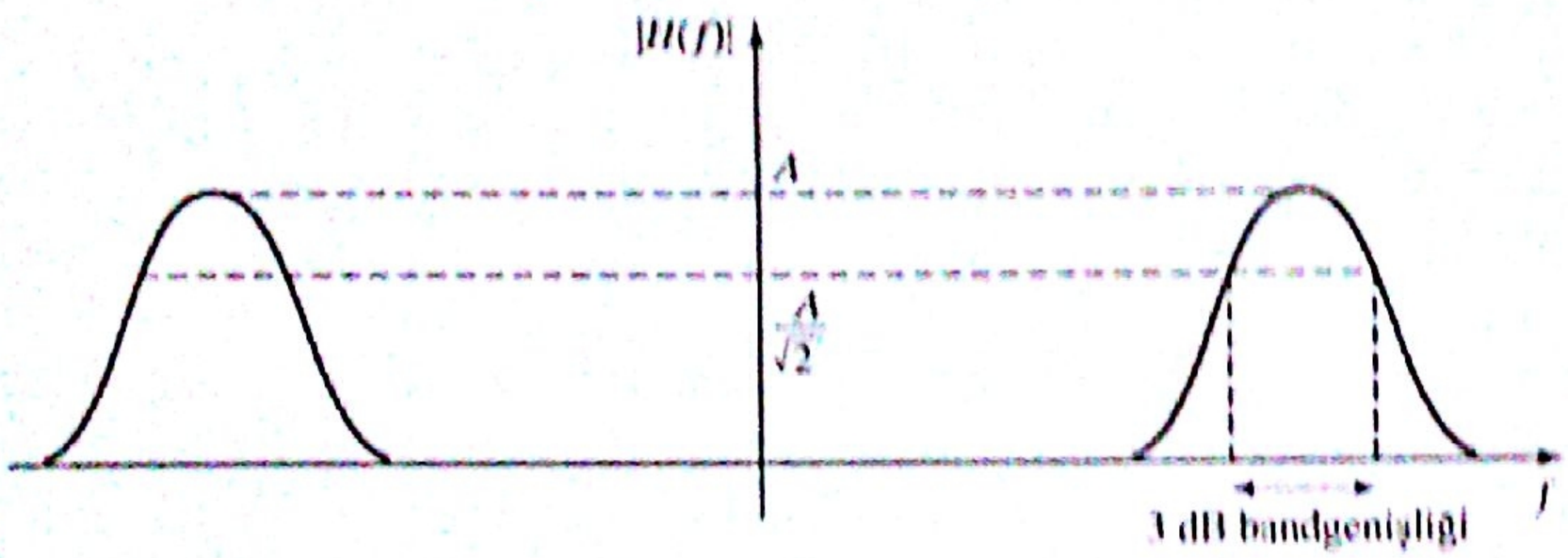
Bir süzgecin genlik transfer fonksiyonu

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{10000}\right)^2}}$$

olarak verilmiştir. Süzgeç tipini ve 3 dB bandgenişliğini belirleyin.

Çözüm $f = 0$ da $|H(f)| = 1$ olmakta ve $|H(f)|$ f_0'dan sonsuza giderken azalmaktadır.



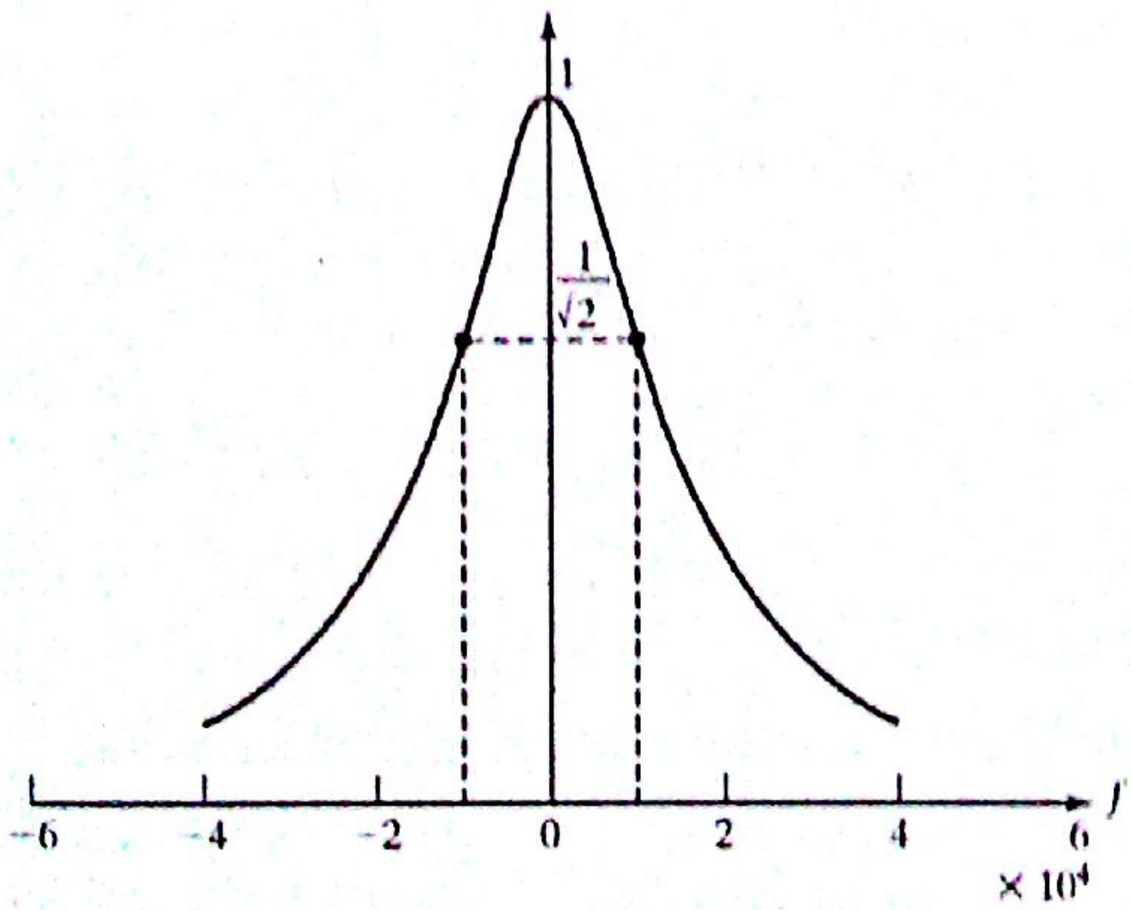


Şekil 2.46 Örnek 2.3.24'de ele alınan süzgecin 3 dB bandgenişliği

Dolayısı ile bu bir alçak geçiren süzgeçtir. Güç, genliğin karesi ile orantılı olacağından

$$|H(f_0)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f_0}{10000}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

yazılabilir. Buradan $f_0 = \pm 10,000$ elde edilir. Dolayısı ile bu bir alçak geçiren süzgeçtir ve 3 dB bandgenişliği 10 kHz'dir. Şekil 2.47 $|H(f)|$ grafiğini göstermektedir.



Şekil 2.47 Örnek 2.3.24'de incelenen süzgecin 3 dB bandgenişliği

2.4 SÜZGEÇ TASARIMI

Haberleşme sistemlerinde, süzgeçler işareti istenmeyen işaret ve karışımlardan ayırtırmak için yoğun olarak kullanılır. Genellikle arzu edilen işaret karakteristiği, süzgecin genlik ve faz tepkisi cinsinden frekans düzleminde ifade edilir. Süzgeç tasarım sürecinde istenen frekans tepki özelliklerine sahip nedensel süzgecin katsayıları bulunur.

Analog veya sayısal farklı süzgeç çeşitleri vardır. özellikle yazılım olarak kolaylık ile bilgisayar üzerinde uyarlanabildiğinden sayısal süzgeçlerin tasarımı üzerinde duracağız. Sayısal süzgeçler genellikle sonlu süreli dürtü tepkisi (SDT: Finite impulse response-FIR) veya sonsuz süreli dürtü tepkisi (SZDT: Infinite impulse response-IIR) sahip olmasına bağlı olarak sınıflandırılır. Bir FIR süzgeç aşağıdaki sistem fonksiyonu tarafından z-düzleminde karakterize edilen tüm-sıfır (all-zero) süzgeçtir.

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{-k}$$

Burada $\{h(k), 0 \le k \le M-1\}$ süzgecin dürtü tepkisidir. Süzgecin frekans tepkisi $H(z)$'in birim çember üzerinde değerlendirilmesi ile elde edilir. Yani $H(z)$ ifadesinde $z = e^{j\omega}$ alınarak $H(w)$ elde edilir. Ayrık zaman düzleminde, FIR süzgeç

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) x(n-k)$$

şeklinde verilen (fark) denklemi ile tanımlanır. Burada $\{x(n)\}$ süzgece gelen giriş dizisi ve $y(n)$ ise çıkış dizisidir.

Bir IIR süzgeç hem sıfır ve hem de kutuplara sahiptir ve genellikle z-düzleminde

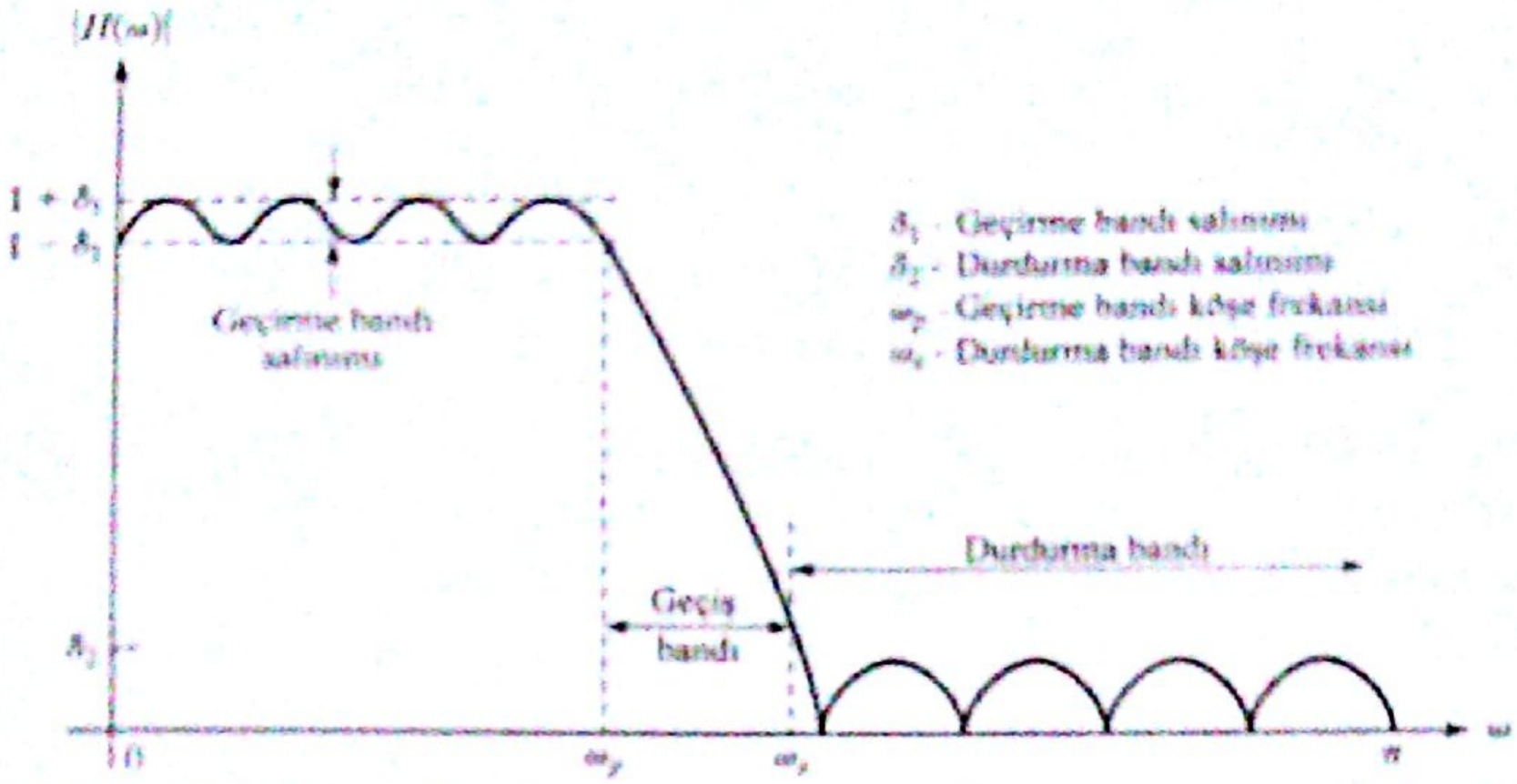
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b(k) z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a(k) z^{-k}}$$

şeklinde verilen oransal sistem fonksiyonu tarafından tanımlanır. Burada $\{a(n)\}$ ve $\{b(n)\}$ süzgeç katsayılarıdır. $H(w)$ frekans tepkisi $H(z)$ ifadesinin birim çember üzerinde değerlendirilmesi ile elde edilir. Ayrık zaman düzleminde IIR süzgeç

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a(k) y(n-k) + \sum_{k=0}^{M-1} b(k) x(n-k)$$

fark denklemi ile tanımlanır.

Pratikte geçiş bandında doğrusal faz karakteristiğinin istendiği süzgeçleme problemlerinde FIR süzgeçler kullanılır. Eğer doğrusal faz gereksinimi sözkonusu değil ise bu durumda ya IIR veya FIR süzgeç kullanılabilir. Genel olarak eğer bir miktar faz bozulması önemsiz veya göz yumulabilir ise bu durumda, süzgeç uyarlamasında daha az katsayı gerektirdiği ve dolayısı ile işlemsel karmaşıklığı daha az olduğu için, IIR süzgeç kullanımı tercih nedenidir.



Şekil 2.48. Fiziksel olarak gerçekleştirilebilir bir süzgecin genlik karakteristiği

Bu kitapta ele alınan haberleşme sistemlerinde faz bozulması arzu edilen bir durum olmadığından doğrusal faz FIR süzgeçlerin tasarımı üzerinde yoğunlaşacağız. Tipik bir nedensel sayısal süzgeç için frekans tepki özellikleri Şekil 2.48'de gösterilmektedir.

Bu süzgeç alçak geçiren süzgeç olarak bilinir. Geçirme bandı kenar frekansı $f_p = \omega_p / 2\pi$, durdurma bandı kenar frekansı $f_s = \omega_s / 2\pi$ geçirme bandı salınımı δ_1 ve durdurma bandı salınımı δ_2 olarak verilmiştir. Frekans tepkisinin geçirme bandından durdurma bandına kadar olan kısmı süzgecin geçiş bandı olarak isimlendirilir. Geçirme bandının genişliği, $0 \le f \le f_p$, ise genellikle süzgecin bandgenişliği olarak tanımlanır.

Genellikle bir süzgecin frekans tepkisinin grafiği oldukça büyük bir dinamik aralığı içerir ve bu aralığı kapsayabilmek için genellikle yapılan uygulama $|H(f)|$ genlik için logaritmik skala kullanılmasıdır. Dolayısı ile geçirme bandı salınımları $20\log_{10}\frac{1+\delta}{1-\delta}$ ve durdurma bandı salınımları $20\log_{10}\delta_2$ olarak ifade edilir.

Bir süzgeç tasarım probleminde, genellikle (1) kabul edilebilir maksimum geçirme bandı salınımı (2) kabul edilebilir maksimum durdurma bandı salınımı (3) geçirme bandı kenar frekansı f_p ve (4) durdurma bandı kenar frekansı f_s. gibi farklı süzgeç parametreleri belirtilir. Verilen bu özelliklerden hareket ile arzu edilen frekans tepkisi özelliklerine en yakın süzgeç katsayıları elde edilir.

MATLAB farklı tasarım tekniklerini kullanan birçok sayısal süzgeç tasarım fonksiyonlarına sahiptir. Remez algoritmasına dayalı olarak (alçak geçiren süzgeçler, Hilbert dönüşüm süzgeçleri ve türev alıcı süzgeçler gibi) sayısal süzgeçlerin tasarım ve uyarlaması üzerinde yoğunlaşacağız. Remez algoritması optimum eşit-salınım, doğrusal faz FIR süzgeç tasarımını mümkün kılar. Bu algoritma FIR süzgeç uzunluğunu, f_p ve f_s gibi kritik frekansları ve δ_2 / δ_1 oranını belirtmemizi bekler. Ancak, süzgeç tasarımında f_p, f_s δ_1 ve δ_2 parametrelerini belirleyip bunlardan hareket ile istenen özellikleri sağlayacak olan süzgeç uzunluğunun belirlenmesi daha doğaldır. Verilen özelliklere göre, süzgecin uzunluğu $\hat{M}$'i yaklaşık olarak elde etmek için kullanılan basit bir formül;

$$\hat{M} = \frac{-20\log_{10}\left(\sqrt{\delta_1\delta_2}\right) - 13}{14.6\Delta f} + 1 \tag{2.4.1}$$

olarak verilir. Burada Δf geçiş bandgenişliğidir ve $\Delta f = f_s - f_p$ olarak verilir.

Örnek 2.4.1

Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir alçak geçiren FIR süzgeç tasarımı için "remez" fonksiyonunu kullanın.

Geçirme bandı salınımı <= 1 dB,
Durdurma bandı salınımı => 40 dB,
Geçirme bandı kenar frekansı = 0.2,
Durdurma bandı kenar frekansı =0.35

1. Denklem (2.4.1) kullanarak süzgeç uzunluğunu tahmin edin.
2. $20\log_{10}|h(f)|$ genlik frekans tepkisini çizin.

Çözüm Verilenlerden hareket ile geçirme bandında salınım $20\log_{10}\frac{1+\delta_1}{1-\delta_1}$ olur. Bu değer 1 dB'e eşittir. Dolayısı ile

$$1 = 20\log_{10}\frac{1+\delta_1}{1-\delta_1}$$

Buradan δ_1 çekilirse

$$\delta_1 = 0.0575$$

bulunur. Diğer yandan, durdurma bandında zayıflatma maksimum geçirme bandı kazancına yani $1+\delta_1$'e göre belirlenir. Dolayısı ile

$$20\log_{10}\frac{\delta_2}{1+\delta_1} = -40$$

ve $\delta_1 = 0.0675$ alınarak δ_2 çözümlenir ise

$$\delta_2 = 0.0106$$

bulunur. Bandgenişliği Δf değeri de

$$\Delta f = f_s - f_p = 0.35 - 0.2 = 0.15$$

olarak bulunur. Bu durumda δ_1, δ_2 ve Δf'in bilinen değerlerinden hareket ile Denklem (2.4.1) kullanılarak süzgeç uzunluğu $\hat{M}$:

$$\hat{M} = \frac{-20\log_{10}\left(\sqrt{\delta_1\delta_2}\right) - 13}{14.6\Delta f} + 1 = 9.7491$$

olarak bulunur. Dolayısı ile süzgeç uzunluğunun 10 olması gerekir.

Bu problemde kullanılacak MATLAB komutu remez komutudur ve

```
h=remez(M,f,m,w)
```

şeklinde bir forma sahiptir. Burada M süzgecin derecesi (süzgeç derecesinin süzgeç uzunluğuna $M = \hat{M} - 1$ ifadesi ile ilişkilendirilmiş olduğuna dikkat edin) ve f frekansları içeren vektördür (Bu vektörün ilk elemanı 0 ve son elemanı 1'dir) f bileşenleri artan bir sırada dizilmiştir ve geçirme bandının bitişini ve durdurma bandının başlangıcını ifade eden önemli frekansları belirler. m uzunluğu f vektörünün uzunluğuna eşit olan bir vektördür ve f vektöründeki frekanslarda süzgecin sahip olmasını istediğimiz genlik seviyelerini içerir. w vektörü ağırlıklandırma vektörüdür ve geçirme bandında $\frac{\delta_2}{\delta_1}$'a eşit iken, durdurma bandında 1'e eşittir. Bizim örneğimizde bu değerler

$$f = [0 \quad 0.1 \quad 0.15 \quad 1]$$

$$m = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$w = \left[\frac{0.0106}{0575} \quad 1\right] = [0.1839 \quad 1]$$

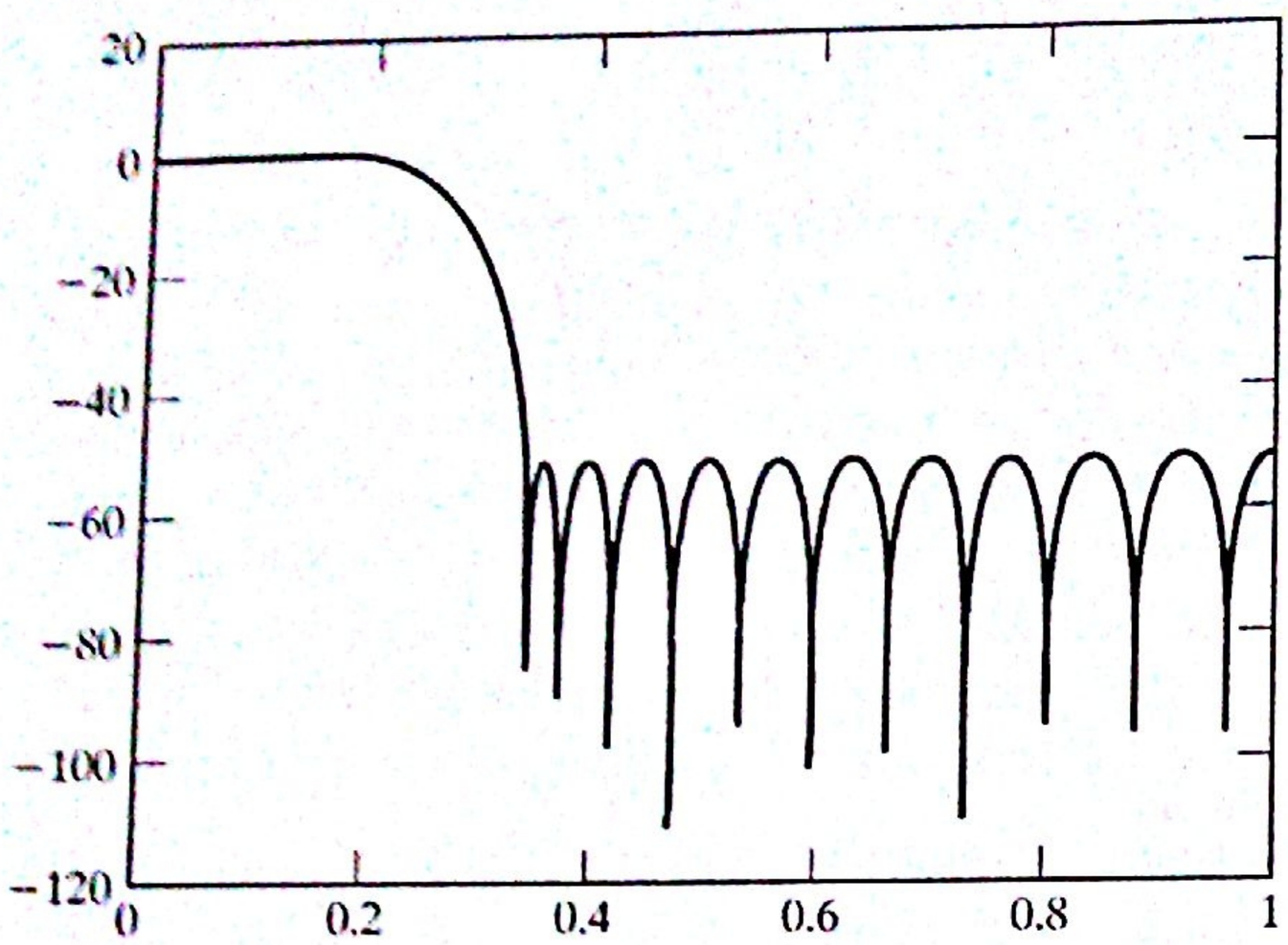
şeklindedir. Bu değerler kullanılarak

```
>> [h]=remez(M,f,m,w)
```

Fonksiyonu MATLAB komut satırında çağrıldığında istenen süzgecin dürtü tepkisi elde edilir. Dürtü tepkisi elde edildikten sonra MATLAB'ın *freqz* komutu kullanılarak süzgecin frekans tepkisi belirlenir. MATLAB ortamında bu süzgecin tasarlanması için gerekli tüm komut seti aşağıda sıralanmıştır.

```
>> fp=0.2;
>> fs=0.35;
>> df=fs-fp;
>> Rp=1;
>> As=40;
>> delta1=(10^(Rp/20)-1)/(10^(Rp/20)+1);
>> delta2=(1+delta1)*(10^(-As/20));
>> Mhat=ceil((-20*log10(sqrt(delta1*delta2))-13)/
     (14.6*df)+1);
>> f=[0 fp fs 1];
>> m=[1 1 0 0];
>> w=[delta2/delta1 1];
>> h=remez(Mhat+20,f,m,w);
>> [H,W]=freqz(h,[1],3000);
>> plot(W/pi,20*log10(abs(H)))
```

Tasarlanan süzgecin transfer fonksiyonu decibel olarak Şekil 2.49'da verilmiştir.



Şekil 2.49 Tasarlanmış süzgecin frekans tepkisi

2.5 GÜÇ VE ENERJİ

Güç ve enerji kavramı, güç işaretleri ve enerji işaretleri kavramları ile birlikte altbölüm 2.1.2.'de tanımlanmıştı. Bu altbölümde, bu tanımları hem zaman ve hem de frekans düzlemine taşıyacağız.

Bir işaretin enerjisi veya gücü, bu işaret 1-ohm'luk bir direnç üzerinde gerilim veya akım kaynağı gibi yorumlandığında işaret tarafından verilen enerji veya gücü temsil eder. (Genellikle kompleks değerli) bir işaretin enerji içeriği

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

şeklinde tanımlanmıştır. Güç içeriği ise

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

olarak verilir. Eğer $\mathcal{E}_x < \infty$ ise işaret enerji tipli işaret ve eğer $0 < P_x < \infty$ ise işaret güç tipli işarettir. Bir işaret aynı zamanda hem enerji tipli ve hem de güç tipli işaret olamaz. Çünkü enerji tipli işaretler için $P_x = 0$ iken güç tipli işaretler için $\mathcal{E}_x = \infty$ olur. Ancak bir işaret ne enerji tipli işaret ve ne de güç tipli işaret olmayabilir. Bu tür bir işaret Problem 2.9'da verilmiştir. Ancak ilgileneceğimiz işaretlerin büyük bir çoğunluğu ya enerji tipli işaret veya güç tipli işarettir. Pratikte tüm periyodik işaretler güç tipli işaretleridir ve güçleri

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt$$

olarak verilir. Burada T_0 periyot ve α herhangi gerçel bir sayıdır.

2.5.1 Enerji Tipli İşaretler

Bir enerji tipli işaret $x(t)$ için özilişki fonksiyonu

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= x(\tau) \star x^*(-\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t)\,dt \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

olarak tanımlanmıştır. $X(t)$ işaretinin özilişki fonksiyonunda $\tau = 0$ yapılır ise işaretin enerji içeriği elde edilir. Yani

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= R_x(0) \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

olur. Fourier dönüşümünün özilişki özelliği kullanılarak (Altbölüm 2.3.2′ e bakın) $R_x(\tau)$′in Fourier dönüşümü $|X(f)|^2$ olarak elde edilir. Bu sonucu veya Rayleigh teoremini kullanarak

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

yazılabilir. Eğer $x(t)$ işaretini, dürtü tepkisi (genellikle kompleks) $h(t)$ ve frekans tepkisi $H(f)$ olan bir süzgeçten geçirir isek, çıkış $y(t) = x(t) \star h(t)$ veya frekans düzleminde $Y(f) = X(f)H(f)$ olur. Çıkış işaret $y(t)$′in enerji içeriğini belirlemek için

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_y &= \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 |H(f)|^2 df \\ &= R_y(0) \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

eşitlikleri kullanılabilir. Burada $R_y(\tau) = y(\tau) \star y^*(-\tau)$ çıkışın özilişki fonksiyonudur. $|Y(f)|^2$ için Ters Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \mathscr{F}^{-1}\left[|Y(f)|^2\right] \\ &= \mathscr{F}^{-1}\left[|X(f)|^2 |H(f)|^2\right] \end{aligned}$$

$$\stackrel{a}{=} \mathcal{F}^{-1}\left[|X(f)|^2\right] * \mathcal{F}^{-1}\left[|H(f)|^2\right]$$

$$\stackrel{b}{=} R_x(\tau) * R_h(\tau) \tag{2.5.5}$$

olarak verilir. Burada (a) evrişim teoreminden hareket ile (b) ise özilişki fonksiyonunun özelliğinden hareket ile elde edilmiştir. Şimdi

$$H(f) = \begin{cases} 1 & W < f < W + \Delta W \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$|Y(f)|^2 = \begin{cases} |X(f)|^2 & W < f < W + \Delta W \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$\mathcal{E}_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$$

$$\approx |X(W)|^2 \Delta W \tag{2.5.6}$$

olur. Bu süzgeç frekans bileşenlerini sadece $f=W$ *gibi* küçük bir aralıkta geçirir iken diğer tüm bileşenleri söntümlendirmektedir. Bundan dolayı çıkış enerjisi giriş işaretinin $f=W$ frekansı etrafında bulunan toplam enerjisine eşittir. Bunun anlamı $[W, W+\Delta W]$ bandında $x(t)$ işaretindeki enerjinin $|H(W)|^2 \Delta W$ olduğudur. Yani

$$|X(W)|^2 = \frac{[W,\ W + \Delta W] \text{ bandgenişliğindeki enerji}}{\Delta W}$$

Bundan dolayı $|X(f)|^2$ bir $x(t)$ *işaretinin enerji spektral yoğunluğu* olarak isimlendirilir ve farklı frekanslarda işaretin her birim bandgenişliği için toplam enerjisini temsil eder. Dolayısı ile bir $x(t)$ işaretinin enerji spektral yoğunluğu (veya enerji tayfı)

$$\mathcal{G}_x(f) = |X(f)|^2$$

$$= \mathcal{F}[R_x(\tau)] \tag{2.5.7}$$

olarak tanımlanır.

Özetlersek;

1. Herhangi bir enerji tipli $x(t)$ işareti için özilişki fonksiyonu $R_x(\tau) = x(\tau) \star x^*(-\tau)$ olarak tanımlanır.
2. $x(t)$ işaretinin $\mathcal{G}_x(f)$ olarak gösterilen enerji spektral yoğunluğu $R_x(\tau)$'in Fourier dönüşümüdür. Ve $|X(f)|^2$'e eşittir.

3. $x(t)$'*in* enerji içeriği $\mathscr{E}_x$. işaretin özilişki fonksiyonunun $\tau = 0$'daki değerine eşittir. Veya farklı bir deyiş ile enerji spektral yoğunluğunun tüm frekanslar üzerinde entegraline eşittir. Yani

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_x &= R_x(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{G}_x(f)\,df \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

4. Eğer $x(t)$ dürtü tepkisi $h(t)$ olan ve çıkışı $y(t)$ olarak gösterilen bir süzgeçten geçirilir ise

$$y(t) = x(t) \star h(t)$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \star R_h(\tau)$$

$$\mathscr{G}_y(f) = \mathscr{G}_x(f)\mathscr{G}_h(f) = |X(f)|^2|H(f)|^2$$

elde edilir.

Örnek 2.5.1

$x(t) = e^{-\alpha t}u_{-1}(t)$, $\alpha > 0$ işaretinin özilişki fonksiyonunu, enerji spektral yoğunluğunu ve enerji içeriğini belirleyin.

Çözüm İlk olarak $x(t)$ işaretinin Fourier dönüşümünü belirleyelim. Tablo 2.1'den

$$X(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

elde edilir. Dolayısı ile

$$\mathscr{G}_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

ve

$$R_x(\tau) = \mathscr{F}^{-1}\left[|X(f)|^2\right] = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|}$$

olur. İşaretin enerji içeriğini basit bir şekilde özilişki fonksiyonunun sıfırdaki değerinden hareket ile bulunabilir.

$$\mathscr{E}_x = R_x(0) = \frac{1}{2\alpha}$$ ■

Örnek 2.5.2

Bir önceki örnekte verilen işaret $h(t) = e^{-\beta t}u_{-1}(t)$, $\beta > 0$, $\beta \neq \alpha$ şeklinde bir dürtü tepkisine sahip bir süzgeçten geçirilir ise çıkıştaki işaretin özilişki fonksiyonunu, güç spektral yoğunluğunu ve işaretin enerji içeriğini belirleyin.

Çözüm Süzgecin frekans tepkisi

$$H(f) = \frac{1}{\beta + j2\pi f}$$

Dolayısı ile

$$|Y(f)|^2 = |X(f)|^2|H(f)|^2$$
$$= \frac{1}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)(\beta^2 + 4\pi^2 f^2)}$$
$$= \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2}\left[\frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} - \frac{1}{\beta^2 + 4\pi^2 f^2}\right]$$

olur. Burada en son adımda kısmi çarpanlara ayırma yaklaşımının kullanıldığına dikkat edin. Bu sonuçtan ve Tablo 2.1'den hareket ile

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2}\left[\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|} - \frac{1}{2\beta}e^{-\beta|\tau|}\right]$$

ve

$$\mathcal{E}_y = R_y(0)$$
$$= \frac{1}{2\alpha\beta(\alpha + \beta)}$$

bulunur. ■

2.5.2 Güç Tipli İşaretler

Güç tipi işaret sınıfları için de yukarıda geliştirdiğimiz benzer bir süreç kullanılabilir. Bu durumda güç tipli işaret $x(t)$ için *zaman-ortalama özilişki fonksiyonu* tanımı

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)\,dt \qquad (2.5.9)$$

şeklinde yapılır. Açıkça görülebileceği gibi işaretin güç içeriği

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$
$$= R_x(0) \qquad (2.5.10)$$

olarak elde edilebilir. $S_x(f)$ $x(t)$ işaretinin *güç spektral yoğunluğu* olarak veya *güç spektrumu,* zaman-ortalama özilişki fonksiyonunun Fourier dönüşümü olarak tanımlanabilir

$$\mathcal{S}_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] \qquad (2.5.11)$$

Bu tanım gerekçelendirilecektir. Şimdi $x(t)$ işaretinin güç içeriğini $R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)e^{j2\pi\tau}df\big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df$ olduğu göz önüne alınarak $S_x(f)$ işareti cinsinden ifade edersek; yani

$$P_x = R_x(0)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{S}_x(f)\,df \qquad (2.5.12)$$

Eğer güç tipli $x(t)$ işareti dürtü tepkisi $h(t)$ olan bir süzgeçten geçirilir ise

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

ve zaman ortalama özilişki fonksiyonu çıkış işareti için

$$R_y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y(t)y^*(t-\tau)\,dt$$

şeklinde olur. $y(t)$ yerine yukarıdaki ifade yerleştirilir ise

$$R_y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)\,du\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} h^*(v)x^*(t-\tau-v)\,dv\right] dt$$

elde edilir. $w=t-u$ değişken dönüşümü yapılır ise ve entegrasyonun sırası değiştirilir ise

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h^*(v) \\ &\qquad \times \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-u}^{\frac{T}{2}+u} \left[x(w)x^*(u+w-\tau-v)\,dw\right] du\,dv \\ &\overset{\text{a}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau+v-u)h(u)h^*(v)\,du\,dv \\ &\overset{\text{b}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} [R_x(\tau+v)\star h(\tau+v)]\,h^*(v)\,dv \\ &\overset{\text{c}}{=} R_x(\tau)\star h(\tau)\star h^*(-\tau) \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

sonucu elde edilir. Burada (a) denkleminde (2.5.9) denkleminde verilen R_x tanımını kullanıldı (b) ve (c) denklemleri evrişim entegrali tanımını kullanmaktadır. Elde edilen denklemin her iki tarafının da Fourier dönüşümü alınır ise

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_y(f) &= \mathcal{S}_x(f)H(f)H^*(f) \\ &= \mathcal{S}_x(f)|H(f)|^2 \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

elde edilir. Giriş-çıkış güç spektral yoğunlukları arasındaki bu ilişki bir süzgecin giriş ve çıkışlarının enerji spektral yoğunlukları arasındaki ilişkinin aynısıdır. Şimdi enerji spektral yoğunluğu için kullandığımız aynı argümanları kullanabiliriz; yani oldukça küçük bir bandgenişliğine sahip ideal bir süzgeç alarak, bu süzgeçten işareti geçiririz ve süzgeç çıkışındaki gücü, süzgecin geçirme bandındaki giriş işaretinin, güç içeriği olarak yorumlarız. Dolayısı ile $\mathcal{S}_x(f)$'in tanımlandığı gibi, farklı frekanslardaki güç toplamını temsil ettiği sonucuna ulaşırız.

Elde edilen bu sonuç, güç spektral yoğunluğunun, zaman-ortalama özilişki fonksiyonunun Fourier dönüşümü olarak *tanımlanmasını* gerekçelendirmektedir.

Periyodik işaretlerin güç-tipli işaretler olduğunu görmüştük. Periyodik işaretler için zaman-ortalama özilişki fonksiyonu ve güç spektral yoğunluk ifadesi önemli ölçüde basitleştirilebilir. $x(t)$ işaretinin T_0 periyoduna sahip periyodik bir işaret olduğunu ve $\{x_n\}$ Fourier seri katsayılarına sahip olduğunu varsayalım. Zaman-ortalama özilişki fonksiyonunu

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)\,dt \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-\frac{kT_0}{2}}^{+\frac{kT_0}{2}} x(t)x^*(t-\tau)\,dt \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{kT_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t-\tau)\,dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t-\tau)\,dt \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

şeklinde elde edilir. Bu ilişki periyodik işaretler için zaman-ortalama özilişki fonksiyonunu verir. Eğer periyodik işaretin Fourier seri açılımı yukarıdaki ifadede yerine konulur ise

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_n x_m^* e^{j2\pi \frac{m}{T_0}\tau} e^{j2\pi \frac{n-m}{T_0}t}\,dt \tag{2.5.16}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi \frac{n-m}{T_0}t}\,dt = \delta_{mn}$$

ilişkisini kullanarak

$$R_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 e^{j2\pi \frac{n}{T_0}\tau} \tag{2.5.17}$$

elde edilir. Bu ilişkiden hareket ile periyodik bir işaretin zaman-ortalama özilişkisinin de periyodik olduğu görülebilir. Orijinal işaret ile aynı periyoda sahiptir ve Fourier seri katsayıları, orijinal işaretin Fourier seri katsayılarının karelerine eşittir.

Periyodik bir işaretin güç spektral yoğunluğunu belirlemek için ise $R_x(\tau)$'in doğrudan Fourier dönüşümü bulunabilir. Periyodik işaretler ile uğraşıyor olduğumuzdan, Fourier dönüşümü frekans düzleminde dürtü fonksiyonları içerir. Bu sonuç, periyodik bir işaret sinüzoidal (kompleks) işaretlerin toplamı olduğundan beklenen bir sonuçtur.

Dolayısı ile güç ayrık frekanslarda (harmoniklerde) yoğunlaşmıştır. Böylece periyodik bir işaretin güç spektral yoğunluğu

$$S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \tag{2.5.18}$$

şeklinde verilir. Periyodik bir işaretin güç içeriğini belirlemek için ise, yukarıdaki ifade tüm frekans spektrumunda entegre edilir. Böyle yapıldığında

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$

sonucu elde edilir. Bu altbölüm 2.2.3'de elde edilen ilişkinin aynısıdır. Eğer periyodik bir işaret, frekans tepkisi $H(f)$ olan bir DZD sistemden geçer ise, çıkış periyodik olacaktır ve çıkışın güç spektral yoğunluğu süzgeç çıkışı ile giriş işaretinin güç spektral yoğunluğu arasındaki ilişki kullanılarak elde edilebilir.

$$S_y(f) = |H(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \tag{2.5.19}$$

ve çıkış işaretinin güç içeriği

$$P_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|^2$$

olur.

2.6 HILBERT DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, bir işaretin Hilbert dönüşümü verilecek ve bu dönüşümün bazı özellikleri sunulacaktır. Hilbert dönüşümü diğer birçok dönüşümden farklıdır. Çünkü bu dönüşümde düzlem değişimi sözkonusu değildir. Buna karşılık, Fourier, Laplace ve z-dönüşümü bir işaretin zaman düzlemi ifadesinden başlayıp bu işaretin frekans düzlemindeki (daha doğru bir deyiş ile dönüşüm düzlemindeki) eşdeğer gösterimini verir. Elde edilen iki işaret *iki farklı argüman*, zaman ve frekans, ile ifade edilen *aynı işaretin* eşdeğer gösterimidir. Dar anlamı ile Hilbert dönüşümü bu anlamda bir dönüşüm değildir. Öncelikli olarak Hilbert dönüşümünün sonucu orijinal işarete eşdeğer değildir. Sonuç tamamı ile farklı bir işarettir. İkinci olarak Hilbert dönüşümü bir düzlem değişimi içermez yani $x(t)$ işaretinin Hilbert dönüşümü, aynı düzlemde $\hat{x}(t)$ ile gösterilen farklı bir işarettir (yani *aynı* t argümanına *sahip* zaman düzleminde.)

Bir $x(t)$ işaretinin Hilbert dönüşümü $\hat{x}(t)$'in frekans bileşenleri, $x(t)$ işaretinin frekans bileşenlerinden 90^0 ileridir. Diğer bir deyiş ile $\hat{x}(t)$, $x(t)$ işareti ile tamamı

ile aynı genlik fakat 90^0 faz gecikmesine sahip frekans bileşenleri içerir. Örneğin, $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ işaretinin Hilbert dönüşümü $A\cos(2\pi f_0 t + \theta - 90^\circ) = A\sin(2\pi f_0 t + \theta)$ olur.

Tüm frekanslarda $\frac{\pi}{2}$ kadar bir gecikme $e^{j2\pi f_0 t}$ ifadesinin $e^{j2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}} = -je^{j2\pi f_0 t}$ olmasına ve $e^{-j2\pi f_0 t}$ ifadesinin $e^{-j(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})} = je^{-j2\pi f_0 t}$ olması anlamına gelir. Diğer bir deyiş ile pozitif frekanslarda işaret tayfı $-j$ ile çarpılır iken, negatif frekanslarda $+j$ ile çarpılır. Bu işaretin tayfının (Fourier Dönüşümünün) $-j\,\mathrm{sgn}(f)$, işareti ile çarpılmasına denktir. Bu bölümde, $x(t)$ real ve DC bileşen içermeyen, yani $X(f)_{|f=0} = 0$, bir işaret olarak kabul edilmiştir.

Dolayısı ile

$$\mathcal{F}[\hat{x}(t)] = -j\,\mathrm{sgn}(f)X(f) \tag{2.6.1}$$

olur. Tablo 2.1 kullanılarak,

$$\mathcal{F}[-j\,\mathrm{sgn}(f)] = \frac{1}{\pi t}$$

elde edilir. Dolayısı ile

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} \star x(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}\,d\tau \tag{2.6.2}$$

olur. Sonuç olarak Hilbert dönüşümü evrişim işlemine yani süzgeçlemeye denktir.

Örnek 2.6.1

$x(t) = 2\mathrm{sinc}(2t)$ işaretinin Hilbert dönüşümünü elde ediniz.

Çözüm Bu problemi çözümü için frekans düzlemi yaklaşımı kullanılacaktır. Fourier dönüşümünün ölçekleme özelliği kullanılarak

$$\mathcal{F}[x(t)] = 2 \times \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f}{2}\right) = \Pi\left(\frac{f}{2}\right) = \Pi\left(f + \frac{1}{2}\right) + \Pi\left(f - \frac{1}{2}\right)$$

elde edilir. Bu ifade de ilk terim tüm negatif frekansları içerir iken ikinci terim tüm pozitif terimleri içerir.

Bir $x(t)$ işaretinin Hilbert dönüşümünün frekans düzlemi gösterimini elde etmek için $\mathcal{F}[\hat{x}(t)] = -j\,\mathrm{sgn}(f).\mathcal{F}[x(t)]$ ifadesi kullanılır. Sonuç olarak

$$\mathcal{F}[\hat{x}(t)] = j\Pi\left(f + \frac{1}{2}\right) - j\Pi\left(f - \frac{1}{2}\right)$$

elde edilir. Ters Fourier dönüşümü alınır ise

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= je^{-j\pi t}\mathrm{sinc}(t) - je^{j\pi t}\mathrm{sinc}(t)\\ &= -j\left(e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}\right)\mathrm{sinc}(t)\\ &= -j \times 2j\sin(\pi t)\mathrm{sinc}(t)\\ &= 2\sin(\pi t)\,\mathrm{sinc}(t),\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Açıkça görülebileceği gibi bir işaret üzerinde Hilbert dönüşümünün uyarlanması bu işaretin tüm frekans bileşenleri üzerinde 90° faz kaydırması yapılmasına eşittir. Bundan dolayı, Hilbert dönüşümünün bir işaret üzerinde gerçekleştirdiği tek değişiklik işaretin fazını değiştirmektir. Daha önemlisi işaretin frekans bileşenlerinin genliği ve dolayısı ile enerji ve gücü Hilbert dönüşüm işlemi sonucunda değişmez. Diğer yandan, Hilbert dönüştümü kosinüsü sinüse dönüştürdüğünden $x(t)$ işaretinin Hilbert dönüşümü $\hat{x}(t)$, $x(t)$ işaretine dik (ortogonal)[7] dir. Ayrıca Hilbert dönüşümü 90° faz kaydırması oluşturduğundan ikinci kez uygulandığında 180°'lik bir faz kaymasına neden olur. Bu ise orijinal işaretin negatifinin alınması anlamına gelir. Ele alınan bu özellikler Hilbert dönüşümün en önemli özellikleridir. Aşağıda elde edilen tüm sonuçlar için, $X(f)$ ifadesinin sıfır frekansında bir dürtü fonksiyonuna sahip olmadığı varsayımı yapılmıştır.

Çift ve Tek Simetri. Bir çift işaretin Hilbert dönüşümü tek simetri bir işaret iken, tek simetri bir işaretin Hilbert dönüşümü çift simetri bir işarettir.

İspat. Eğer $x(t)$ çift bir işaret ise, $X(f)$ gerçel ve çift bir fonksiyondur; dolayısı ile $-j\text{sgn}(f)X(f)$ sanal ve tek bir fonksiyondur. Dolayısı ile ters Fourier dönüşümü $\hat{x}(t)$ tek simetrik olur. Eğer $x(t)$ tek simetrik ise bu durumda $X(f)$ sanal ve tektir. Dolayısı ile $-j\text{sgn}(f)X(f)$ gerçel ve çift olur. Bu yüzden $\hat{x}(t)$ çifttir.

İşaret Değişimi. Bir işarete Hilbert dönüşümünü iki kez uygulamak $x(t)$'in işaretinin değişimine neden olur. Yani

$$\hat{\hat{x}}(t) = -x(t) \tag{2.6.3}$$

İspat.

$$\mathcal{F}[\hat{\hat{x}}(t)] = [-j\text{sgn}(f)]^2 X(f) \tag{2.6.4}$$

olduğundan

$$\mathcal{F}[\hat{\hat{x}}(t)] = -X(f) \tag{2.6.5}$$

sonucu elde edilir. Burada $X(f)$ orijinde bir dürtü fonksiyonu içermediği kabul edilmiştir.

Enerji. Bir işaretin enerji içeriği bu işaretin Hilbert dönüşümünün enerji içeriğine denktir.

İspat. Fourier dönüşümünün Rayleigh teoremini kullanılır ise

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \tag{2.6.6}$$

ve

$$\mathcal{E}_{\hat{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |-j\text{sgn}(f)X(f)|^2 df \tag{2.6.7}$$

elde edilir. $f = 0$ hariç $|-j\text{sgn}(f)|^2 = 1$ olduğu ve $X(f)$'in orijinde bir dürtü işareti içermediği göz önüne alınır ise ispat tamamlanmış olunur.

---

[7] Eğer $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = 0$ ise $x(t)$ ve $y(t)$ ortogonaldir.

Diklik (Ortogonallik). Bir $x(t)$ işareti ve Hilbert dönüşümü diktir.

İspat. Fourier dönüşümünün Parseval teoremi kullanılır ise

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)[-j\,\mathrm{sgn}(f)X(f)]^* df \\ &= -j\int_{-\infty}^{0} |X(f)|^2 df + j\int_{0}^{+\infty} |X(f)|^2 df \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.6.8}$$

elde edilir. Burada son adımda $X(f)$'in Hermitian simetriye sahip olduğu ve dolayısı ile $|X(f)|^2$'in çift simetri olduğu gerçeği göz önüne alınmış.

2.7 ALÇAK GEÇİREN VE BANDGEÇİREN İŞARETLER

Alçakgeçiren işaret, işaret tayfının (frekans içeriğinin) sıfır frekans etrafında yerleştiği işarettir. Bandgeçiren işaret ise tayfı sıfır frekansından çok ötede olan işarettir. Bandgeçiren işaretin frekans tayfı genellikle işaret bandgenişliğinden çok yüksek olan bir f_c frekansı etrafında yoğunlaşmıştır (Bandgenişliğinin bir işarette mevcut olan tüm pozitif frekanslar kümesi olduğunu hatırlayın). Bundan dolayı bandgeçiren işaretin bandgenişliği, frekans içeriğinin yerleştiği f_c frekansından çok daha küçüktür.

Bandgeçiren bir işaret için uç bir örnek, frekansı f_c olan tek frekanslı bir işarettir. Bu işaretin bandgenişliği sıfırdır ve genellikle

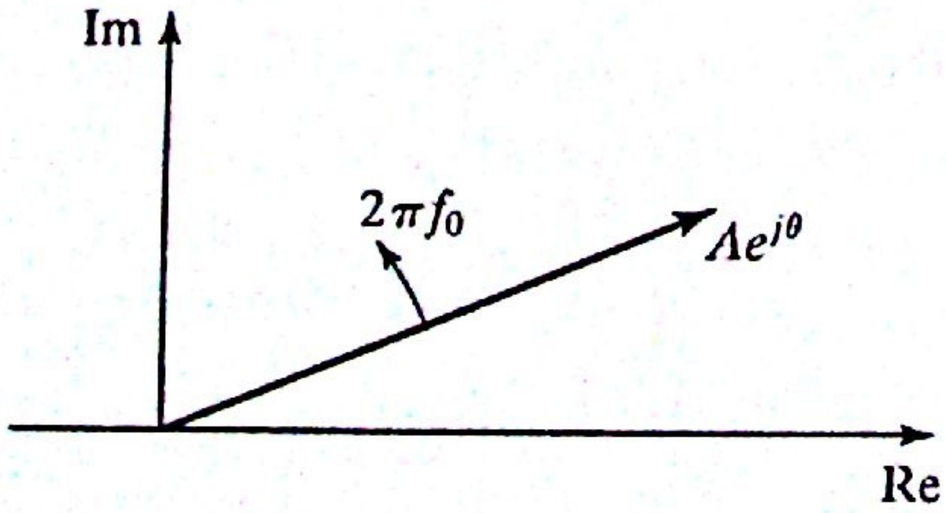
$$x(t) = A\cos(2\pi f_c t + \theta)$$

şeklinde ifade edilir. Bu bir sinüzoidal işarettir ve

$$x_l = Ae^{j\theta}$$

şeklinde fazör ile ifade edilebilir. Şekil 2.50'de gösterildiği gibi bu arada A pozitif kabul edilmiştir ve θ açısı $-\pi$ ile $+\pi$ aralığındadır.

Bu fazör A genlik büyüklüğüne ve θ faz açısına sahiptir. Eğer bu fazör $\omega_0 = 2\pi f_0$ açısal hızı ile saat yönünün tersine döner ise (ki bu durum işaretin $e^{j2\pi f_0 t}$ ile çarpımı anlamına gelir)



Şekil 2.50. Bir sinüzoidal işarete karşılık gelen fazör

bu durumda sonuç $Ae^{j2\pi f_0 t}$ olur. Bu fazörün gerçel eksen üzerindeki izdüşümü (yani gerçel kısmı) $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ dir.

$x(t)$ işaretini

$$x(t) = A\cos(2\pi f_c t + \theta) \tag{2.7.1}$$

$$= A\cos(\theta)\cos(2\pi f_c t) - A\sin(\theta)\sin(2\pi f_c t) \tag{2.7.2}$$

$$= x_c\cos(2\pi f_c t) - x_s\sin(2\pi f_c t) \tag{2.7.3}$$

şeklinde açabiliriz. Daha önceki tartışmalardan hareket ile bu tek frekanslı işaretin iki bileşeni olduğu görülür. İlk bileşen $x_0 = A\cos(\theta)\cos(2\pi_0 t)$ ile aynı yöndedir ve bu bileşen *aynı fazda (in-phase) bileşen* olarak adlandırılır. Diğer bileşen ise $x_s = A\sin(\theta)$ dir ve $-\sin(2\pi f_0 t)$ ile aynı yöndedir. Bu bileşen ise *dik bileşen (quadrature component)* olarak adlandırılır. Ayrıca

$$x_l = Ae^{j\theta} = x_c + jx_s \tag{2.7.4}$$

yazılabileceği görülebilir. Şimdi Şekil 2.50'de verilen fazör yerine genlik büyüklüğü yavaşça değişen bir fazöre sahip olduğumuzu varsayalım. Bu fazör

$$x_l(t) = A(t)e^{j\theta(t)} \tag{2.7.5}$$

şeklinde gösterilir. Burada $A(t)$ ve $\theta(t)$ (f_c ye göre) zamanla yavaş değişiyor olsun. Bu durumda (2.7.3) denklemine benzer şekilde

$$x(t) = \mathrm{Re}[A(t)e^{j(2\pi f_c t + \theta(t))}] \tag{2.7.6}$$

$$= A(t)\cos(\theta(t))\cos(2\pi f_c t) - A\sin(\theta(t))\sin(2\pi f_c t) \tag{2.7.7}$$

$$= x_c(t)\cos(2\pi f_c t) - x_s(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{2.7.8}$$

yazılabilir. Yukarıda ele aldığımız tek frekanslı işaretten farklı olarak, bu işaret bir frekans aralığını kapsar; bundan dolayı bu işaretin bandgenişliği sıfır değildir. Ancak, genlik (aynı zamanda *zarf (envelope)* olarak adlandırılır) ve faz zamanla yavaş değişim gösterdiğinden bu işaretin frekans bileşenleri *fc* etrafında küçük bir bandı işgal eder. Şekil 2.51'de üç bandgeçiren işaretin tayfları gösterilmektedir.

Bu durumda aynı-faz ve dik bileşenler

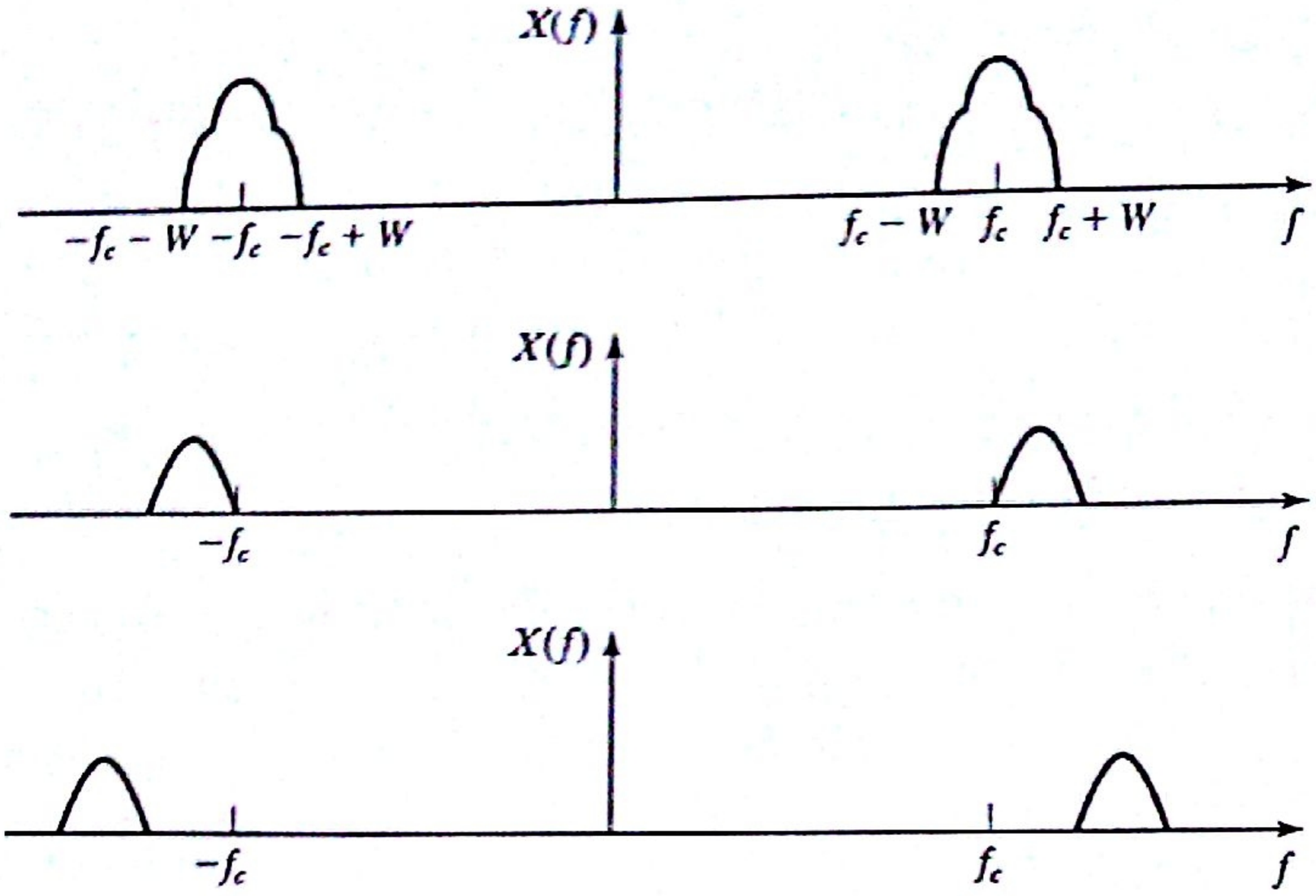
$$x_c(t) = A(t)\cos(\theta(t)) \tag{2.7.9}$$

$$x_s(t) = A(t)\sin(\theta(t)) \tag{2.7.10}$$

olur ve

$$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_c t) - x_s(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{2.7.11}$$

yazılabilir. Burada bandgeçiren işaretin aynı-faz ve dik bileşenlerinin zamanla yavaş değişim gösterdiğini ve dolayısı ile bu işaretlerin alçak geçiren işaretler olduğuna dikkat edin.



Şekil 2.51 Üç bangeçiren işaretin tayfı

(2.7.11) denklemi oldukça faydalı ilişkileri vermektedir; Bu ilişki temel olarak, bir bandgeçiren işaretin iki alçakgeçiren işaret cinsinden, yani bandgeçiren işaretin aynı-faz ve dik bileşenlerini cinsinden, ifade edilebileceğini söylemektedir.

Bu durumda kompleks alçak geçiren işaret

$$x_l(t) = x_c(t) + jx_s(t) \tag{2.7.12}$$

bandgeçiren işaret *x(t)'in alçakgeçiren eşdeğeridir*. Eğer $x_l(t)$ polar koordinatta gösterilir ise

$$x_l(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}e^{j \arctan \frac{x_s(t)}{x_c(t)}}$$

yazılabilir. Bu durumda bandgeçiren işaretin *zarf* ve *fazı*

$$\begin{cases} |x_l(t)| = A(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \\ \angle x_l(t) = \theta(t) = \arctan \frac{x_s(t)}{x_c(t)} \end{cases} \tag{2.7.13}$$

şeklinde tanımlanır ise $x_l(t)$ işareti

$$x_l(t) = A(t)e^{j\theta(t)} \tag{2.7.14}$$

şeklinde gösterilir. (2.7.14) ve (2.7.11) denklemleri kullanılarak

$$x(t) = \mathrm{Re}[x_l(t)e^{j2\pi f_c t}] \tag{2.7.15}$$

$$= \mathrm{Re}[A(t)e^{j2\pi f_c t + \theta(t)}] \tag{2.7.16}$$

$$= A(t)\cos(2\pi f_c t + \theta(t)) \tag{2.7.17}$$

elde edilir.

(2.7.17) ve (2.7.11) bandgeçiren işareti alçakgeçiren işaretler cinsinden temsil etmek için kullanılabilecek iki yöntem sunmaktadır. İşaret aynı-fazda ve dik bileşenler cinsinden ifade edilebileceği gibi bandgeçiren işaretin faz ve genliği cinsinden de ifade edilebilir.

2.8 İLAVE KAYNAKLAR

Literatürde DZD sistemlerin zaman ve frekans düzleminde analizini ele alan birçok kaynak mevcuttur. Oppenheim, Willsky and Young(1983) hem ayrık zamanlı ve hem de sürekli zamanlı sistemlerin geniş bir zaman ve frekans analizini içerir. Papoulis (1962) ve Bracewll (1965) Fourier seri ve dönüşüm tekniklerinin derin bir analizini sunar. Doğrusal sistemlerin doğrusal operatör teorisine dayalı daha ileri düzeyde bir incelenmesi Fraks (1969)'da verilmiştir. Sayısal süzgeçler Proakis ve Manolakis (1996) tarafından detaylı incelenmiştir. Ingle ve Proakis'in kitabı (1997) sayısal süzgeç tasarım tekniklerinde MATLAB kullanımını vurgulamaktadır.

PROBLEMLER

2.1 Aşağıdaki işaretleri çizin.

1. $x_1(t) = \Pi(2t + 5)$
2. $x_2(t) = \Pi(-2t + 8)$
3. $x_3(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda(t - n)$
4. $x_4(t) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{t-4n}{2}\right) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t - 4n)$
5. $x_5(t) = \text{sgn}(2t) - \text{sgn}(t)$
6. $x_6(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \Lambda(t - 2n)$
7. $x_7(t) = \text{sinc}(10t)$
8. $x_8(t) = \text{sinc}\frac{t}{10}$
9. $x_9(t) = 4\Pi\left(\frac{t}{6}\right)\cos(4\pi t)$

2.2 Aşağıda verilen işaretlerin ayrık versiyonlarını çizin. Bu işaretlerin T_0 da örneklendiğini varsayın. Yani $x[n] = x(nT_0)$

1. $x(t) = \text{sinc}(3t)$ and $T_0 = \frac{1}{9}$
2. $x(t) = \Pi\left(\frac{2t-1}{3}\right)$ and $T_0 = \frac{1}{8}$
3. $x(t) = tu_{-1}(t) - (t - 1)u_{-1}(t - 1)$ and $T_0 = \frac{1}{4}$

2.3 İki işaret $x_1(t) = 1$ ve $x_2(t) = \cos 2\pi t$, $t = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$. zamanlarında örneklenmiştir. Sonuçta elde edilen ayrık zamanlı işaretler $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ olarak gösterilmektedir. $x_1[n] = x_2[n]$ olduğunu gösterin. Bu gözlemden nasıl bir sonuç çıkarılabilir?

2.4 İki sürekli periyodik işaretin toplamı periyodik olmak zorunda değil iken iki ayrık periyodik işaretin toplamının periyodik olduğunu gösterin. Hangi şartlar altında iki sürekli işaretin toplamı sürekli olur?

2.5 Aşağıda verilen işaretlerin periyodik olup olmadığını belirleyin. Periyodik işaretler için işaretin periyodunu belirleyin.

1. $\sin(4000\pi t) + \cos(11{,}000\pi t)$
2. $\sin(4000\pi t) + \cos(11{,}000t)$
3. $\sin[4000\pi n] + \cos[11{,}000\pi n]$
4. $\sin[4000\pi n] + \cos[11{,}000n]$

2.6 İşaretleri çift-tek işaretler ve ne çift ne de tek olmayan işaretler olarak sınıflandırın. Her iki durumda da işaretlerin çift ve tek kısımlarını bulun.

1. $x_1(t) = \begin{cases} e^{-t} & t > 0 \\ -e^{t} & t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$
2. $\cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$
3. $x_2(t) = e^{-|t|}$
4. $x_3(t) = \begin{cases} \frac{t}{|t|} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$
5. $x_4(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$
6. $x_5(t) = \sin t + \cos t$
7. $x_6(t) = x_1(t) - x_2(t)$, burada $x_1(t)$ tek ve $x_2(t)$ çift simetriye sahiptir.

2.7 Aşağıdaki üç işareti güç-tipli işaret, enerji tipli işaret ve ne güç ne de enerji tipli işaret şeklinde sınıflandırın. Enerji tipli ve güç tipli işaretler için işaretin enerji ve güç içeriğini bulun.

1. $x_1(t) = \left(e^{-t}\cos t\right) u_{-1}(t)$
2. $x_2(t) = e^{-t}\cos t$
3. $x_3(t) = \operatorname{sgn}(t)$
4. $x_4(t) = A\cos 2\pi f_1 t + B\cos 2\pi f_2 t$

2.8 Aşağıdaki işaretleri periyodik ve periyodik olmayan işaretler olarak sınıflandırın.

1. $x_1(t) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{t-4n}{2}\right) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t-4n)$

2. $x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t-n)$
3. $x_3(t) = \sin t + \sin 2\pi t$
4. $x_4[n] = \sin n$
5. $x_5(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-nT)$, Burada $y(t)$ herhangi bir işaret ve T herhangi bir sabittir.

2.9 Enerji tipli ve güç tipli işaret tanımlarından hareket ile;

1. $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\theta)}$ işaretinin güç tipli işaret olduğunu ve işaretin gücünün A^2 olduğunu gösterin.
2. $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ işaretinin güç tipli işaret olduğunu ve işaretin gücünün $\frac{A^2}{2}$ olduğunu gösterin.
3. $u_{-1}(t)$ birim basamak işaretinin bir güç işareti olduğunu gösterin ve güç içeriğinin belirleyin.
4. $x(t) = \begin{cases} Kt^{-\frac{1}{4}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$ işaretinin ne bir enerji ne de güç işareti olmadığını gösterin.

2.10 $x(t) = \Lambda(t)u_{-1}(t)$ işaretinin çift ve tek kısımlarını bulun.

2.11 Tek ve çift işaret tanımından hareket ile;

1. Bir işaretin tek ve çift bileşenlerine ayrıştırılmasının tekil olduğunu gösterin.
2. İki tek veya iki çift işaretin çarpımlarının çift, fakat bir çift ve bir tek işaretin çarpımlarının ise tek olduğunu gösterin.
3. Ne tek ne de çift simetriye sahip fakat çarpımları çift olan iki işaret bulmaya çalışın.

2.12 Aşağıdaki işaretleri çizin.

1. $x_1(t) = \Pi(t) + \Pi(-t)$
2. $x_2(t) = \Pi(t) - \Pi(t-1)$
3. $x_3(t) = \Lambda(t)\Pi(t)$
4. $x_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t-2n)$
5. $x_5(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \Lambda(t-n)$
6. $x_6(t) = \mathrm{sgn}(t) + \mathrm{sgn}(1-t)$
7. $x_7(t) = 1 + \mathrm{sgn}(t)$
8. $x_8(t) = \mathrm{sgn}^2(t)$
9. $x_9(t) = \mathrm{sinc}(t)\,\mathrm{sgn}(t)$

10. $x_{10}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n n\delta(t-n)$
11. $x_{11}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Pi(\frac{t}{n})$

2.13 Dürtü fonksiyonunun özelliklerini kullanarak aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

1. $x_1(t) = \text{sinc}(t)\,\delta(t)$
2. $x_1(t) = \text{sinc}(t)\,\delta(t-3)$
3. $x_1(t) = \text{sinc}(t-2)\,\delta(t)$
4. $x_2(t) = \Lambda(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n)$
5. $x_3(t) = \Lambda(t) * \delta'(t)$
6. $x_4(t) = \cos t\,\delta(3t)$
7. $x_4(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)\delta(3t)$
8. $x_4(t) = \cos t\,\delta(3t+1)$
9. $x_5(t) = \delta(5t) * \delta(4t)$
10. $x_6(t) = \delta(5t) * \delta'(3t)$
11. $x_7(t) = \cos t\,\delta'(t)$
12. $x_8(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t)\,\delta(2t-1)\,dt$
13. $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t)\,\delta(t)\,dt$
14. $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t+1)\,\delta(t)\,dt$
15. $\int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Pi(\frac{t}{n})\right]\delta(t)\,dt$
16. $\int_{-\infty}^{\infty} \cos t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \delta(2^n t)\right] dt$

2.14 Dürtü işaretinin çift olduğunu gösterin. Bu işaretini n. türevlerinin tek veya çift olması hakkında ne söyleyebilirsiniz?

2.15 $x(t)\star\delta(t) = x(t)$ olduğunu görmüştük. Buradan hareket ile

$$x(t) * \delta^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t)$$

ve

$$x(t) * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

olduğunu gösterin.

2.16 Aşağıdaki sistemleri doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler olarak sınıflandırın.

1. $y(t) = 2x(t) - 3$
2. $y(t) = |x(t)|$

3. $y(t) = 0$
4. $y(t) = 2^{x(t)}$
5. $y(t) = \begin{cases} 1 & x(t) > 0 \\ 0 & x(t) \leq 0 \end{cases}$
6. $y(t) = \begin{cases} \frac{x(t)}{|x(t)|} & x(t) \neq 0 \\ 0 & x(t) = 0 \end{cases}$
7. $y(t) = \begin{cases} \frac{x^2(t)}{|x(t)} & x(t) \neq 0 \\ 0 \end{cases}$
8. $y(t) = e^{-t}x(t)$
9. $y(t) = x(t)u_{-1}(t)$
10. $y(t) = x(t)\delta(t)$
11. $y(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$
12. $y(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & t > 0 \\ x(t) & t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$
13. $y(t) = x(t) + y(t - 1)$
14. $y(t) =$ $x(t)$ işaretinin $(-\infty, t]$ aralığındaki sıçramaların toplamı

2.17 Bir sistemin ancak ve ancak

1. Eğer homojen ise yani tüm $x(t)$ giriş işaretleri için ve tüm α gerçel sayıları için $\mathcal{T}[\alpha x(t)] = \alpha \mathcal{T}[x(t)]$ ise
2. Eğer *toplanır ise* yani tüm $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ işaretleri için

$$\mathcal{T}[x_1(t) + x_2(t)] = \mathcal{T}[x_1(t)] + \mathcal{T}[x_2(t)]$$

ise doğrusal bir sistem olduğunu ispat edin. Yani (2.1.39) ve (2.1.40) ile verilen iki denklemin birbirine denk olduğunu gösterin.

2.18 Problem 2.16'da verilen sistemler için Problem 2.17'de verilen şartlardan herhangi birinin veya (her ikisinin) sağlanıp sağlanmadığını kontrol edin.

2.19 Eğer bir sistem Problem 2.17'de tanımlanan toplanabilirlik özelliğini sağlıyor ise bu sistem tüm rasyonel α değerleri için homojen olur.

2.20

$$y(t) = \begin{cases} \frac{x^2(t)}{x'(t)} & x'(t) \neq 0 \\ 0 & x'(t) = 0 \end{cases}$$

denklemi ile tanımlanan sistemin homojen olduğunu fakat doğrusal olmadığını gösterin. Böyle bir sistem için bir başka örnek verebilir misiniz?

2.21 Doğrusal bir sistemin sıfıra eşdeğer bir giriş işaretine tepkisinin sıfıra eşdeğer bir çıkış olduğunu gösterin.

2.22 $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ giriş-çıkış ilişkisi ile tanımlanan sistem modülatör olarak adlandırır. Burada f_0 sabit bir değerdir. Bu sistem doğrusal mıdır? Bu sistem zamanla değişmez midir?

2.23 Aşağıdaki bildirimler doğru mu, yanlış mı? Neden

1. Bileşenleri doğrusal olmayan bir sistem kaçınılmaz olarak doğrusal değildir.
2. Bileşenleri zamanla değişmez olan bir sistem kaçınılmaz olarak zamanla değişmezdir.
3. Nedensel bir sistemin nedensel bir işarete tepkisi nedenseldir.

2.24 Aşağıdaki sistemlerin zamanla değişmez veya zamanla değişen sistemler olup olmadığını belirleyin.

1. $y(t) = 2x(t) + 3$
2. $y(t) = (t + 2)x(t)$
3. $y(t) = x(t) + t$
4. $y(t) = x(-t)$
5. $y(t) = x(t)u_{-1}(t)$
6. $y(t) = x(t)\delta(t)$
7. $y(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$
8. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$
9. $y(t) = x(t) + y(t - 1)$
10. $y(t) = \begin{cases} \frac{x(t)}{|x(t)|} & x(t) \neq 0 \\ 0 & x(t) = 0 \end{cases}$

2.25 DZD bir sistemin $x(t)$ işaretine tepkisi $y(t)$ ise bu durumda bu sistemin $\frac{d}{dt}x(t)$ girişine tepkisi $\frac{d}{dt}y(t)$ olur.

2.26 Bir DZD sistemin $x(t)$ işaretine tepkisi $y(t)$ ise bu durumda bu sistemin $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ girişine tepkisi $\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$ olur.

2.27 Bir doğrusal zamanla değişmeyen sistemin $x(t) = e^{-at}u_{-1}(t)$ girişine tepkisi $\delta(t)$'dir. Zaman-düzlemi analizini ve Problem 2.25'in sonuçlarını kullanarak bu sistemin dürtü tepkisini belirleyin. Bu sistemin genel bir $x(t)$ işaretine tepkisi nedir?

2.28 Bir sistemin

$$y(t) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(\tau)\,d\tau$$

şeklinde tanımlandığını varsayalım. Bu sistem nedensel midir?

2.29 Bir DZD sistemin nedensel olabilmesi için, $t < 0$ için $h(t)$ sıfır olmalıdır. Nedensel olan ancak dürtü tepkisi $t < 0$ için sıfırdan farklı olan bir doğrusal olmayan sisteme örnek verin.

2.30

1. $h(t) = \text{sinc}(t)$
2. $h(t) = \Pi\left(\frac{t-3}{6}\right)$
3. $h(t) = \text{sinc}(t)u_{-1}(t)$

2.31 Evrişim entegralini kullanarak, bir DZD sisteme giriş olarak verilen $u_{-1}(t)$ için sistemin tepkisinin $\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$ olduğunu gösterin.

2.32 Bir türev alıcının dürtü tepkisi nedir? Bu sistemin herhangi bir $x(t)$ işaretine tepkisini giriş ve dürtü tepkisinin evrişimini bularak belirleyin. Bu işlemleri geciktirme sistemi için tekrarlayın.

2.33 $y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau$

ile tanımlanmış olan sistemin (T bir sabittir) sonlu uzunlukta entegral alıcıdır. Bu sistem DZD midir? Bu sistemin dürtü tepkisini bulun.

2.34 Aşağıdaki evrişim entegrallerini hesaplayın.

1. $e^{-t}u_{-1}(t) \star e^{-t}u_{-1}(t)$
2. $e^{-t}u_{-1}(t) \star u_{-1}(t)$
3. $\Pi(t) \star \Lambda(t)$
4. $(\Lambda(t)\text{sgn}(t)) \star u_{-1}(t)$
5. $\Lambda(t) \star \text{sgn}(t)$
6. $(\Lambda(t)u_{-1}(t)) \star \Pi(t)$

2.35 Bir nedensel DZD sistemin evrişim entegralinin

$$y(t) = \int_{0}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

indirgenebileceğini gösterin.

2.36 $\psi_n(t) = \sqrt{\frac{1}{T_0}} e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$ işaret kümesinin $[\alpha, \alpha + T_0]$ aralığında ortogonal (dik) bir işaret seti oluşturduğunu gösterin. Burada α herhangi bir sabittir.

2.37 Bu problemde Cauchy-Schwartz eşitsizliğinin ispatını sunacağız.

1. Negatif olmayan $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ ve $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \leq \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

eşitlik için gerekli şartlar nelerdir?

2. $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ ve $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ kompleks sayılar ise

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i^*| = \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i^*|$$

olduğunu gösterin. Eşitlik için gereli şartlar nelerdir?

3. (1) ve (2)'den

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*\right| \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

olduğu sonucu elde edilir. Eşitlik için gerekli şartlar nelerdir?

4. Yukarıda elde edilen sonucu entegral işlemi için genelleştirin ve

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t)\, dt\right| \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

Cauchy-Schwartz eşitsizliğini ispat edin. Eşitlik için gerekli olan şartlar nelerdir?

2.38 $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^N$ N işaretten oluşan ortogonal bir set olsun. Yani

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t)\, dt\right| \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

ve $x(t)$ herhangi bir işaret olsun. $\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi_i(t)$ $x(t)$ işaretin $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^N$ terimleri cinsinden doğrusal bir yaklaşımı olsun.

$$\epsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2\, dt$$

ifadesini minimize edecek α_i değerlerini bulunuz.

1. α_i'leri minimize etmenin

$$\alpha_i = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi_i^*(t)\,dt$$

denklemini sağlayacağını gösterin.

2. Yukarıdaki α_i değerlerinin seçilmesi durumunda

$$\epsilon_{\min}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt - \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^2$$

eşitliğinin elde edileceğini gösterin.

2.39 Aşağıdaki işaretlerin Fourier seri açılımını belirleyin.

1. $x(t) = \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t)$
2. $x(t) = \cos(2\pi t) - \cos(4\pi t + \pi/3)$
3. $x(t) = 2\cos(2\pi t) - \sin(4\pi t)$
4. $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t - 2n)$
5. $x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t - n)$
6. $x_3(t) = e^{t-n}$ for $n \le t < n + 1$
7. $x_4(t) = \cos t + \cos 2.5t$
8. $x_5(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t - n)u_{-1}(t - n)$
9. $x_6(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t - nT)$
10. $x_7(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(t - nT)$
11. $x_8(t) = |\cos 2\pi f_0 t|$ (tam dalga doğrultucu çıkışı)
12. $x_9(t) = \cos 2\pi f_0 t + |\cos 2\pi f_0 t|$ (yarım dalga doğrultucu çıkışı)

2.40 Gerçel ve periyodik bir $x(t)$ işareti için çift ve tek bileşenlerin

$$x_e(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right)$$

$$x_o(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right)$$

şeklinde olacağını gösterin.

2.41 x_n ve y_n sırası ile $x(t)$ ve $y(t)$ işaretlerinin Fourier seri katsayıları olsun. $x(t)$ işaretinin periyodunun T_0 olduğunu varsayarsak, aşağıdaki her bir durum için y_n katsayılarını x_n ile ifade ediniz.

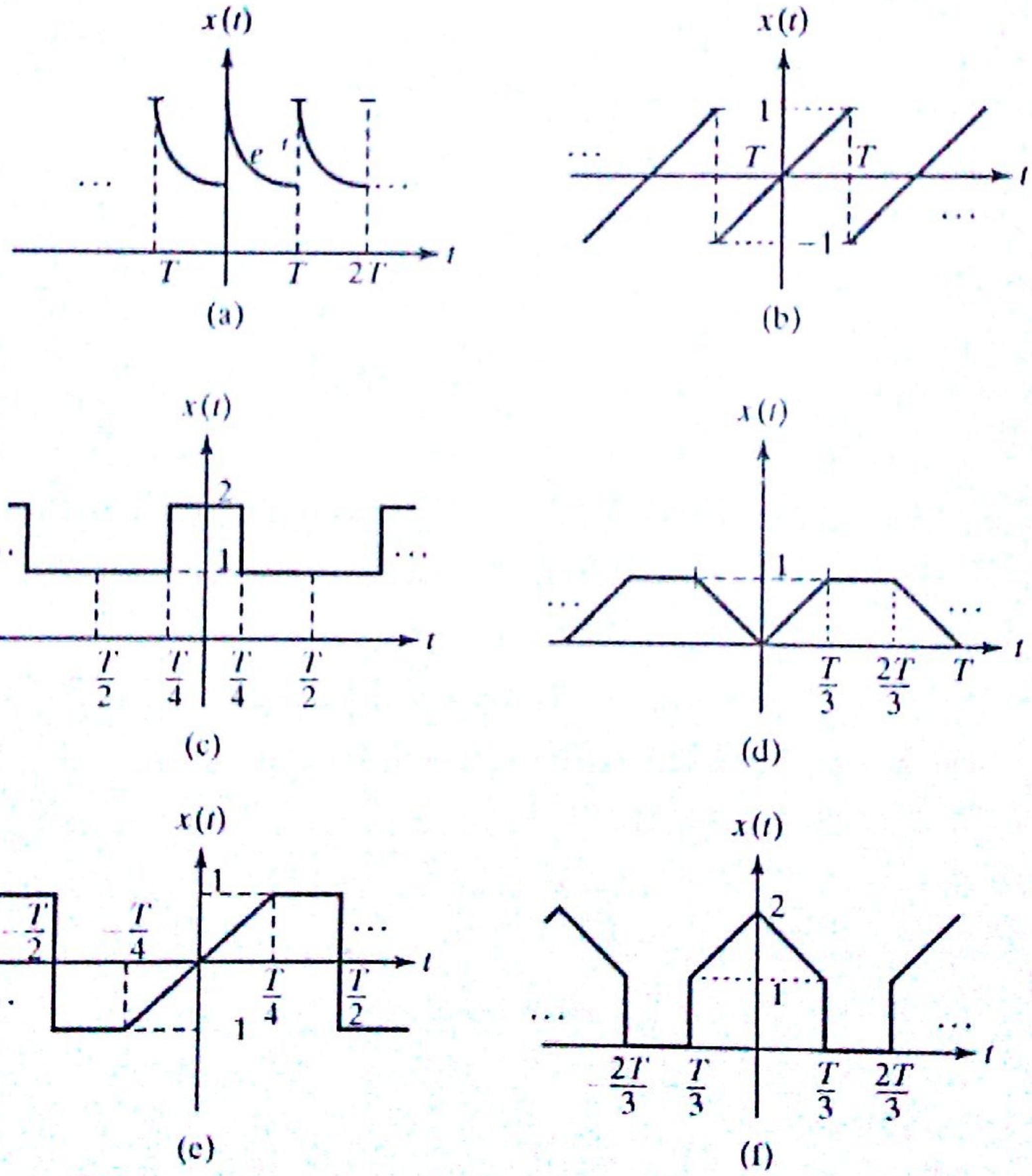
1. $y(t) = x(t - t_0)$
2. $y(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t}$
3. $y(t) = x(at)$, $a \neq 0$
4. $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

2.42 $x(t)$ ve $y(t)$ T_o periyoduna sahip iki periyodik işaret ve x_n ve y_n sırası ile bu iki işaretin Fourier seri katsayılarını temsil ediyor olsun.

$$\frac{1}{T_0}\int_{a}^{a+T_0} x(t)y^*(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n y_n^*$$

olduğunu gösterin.

2.43 Şekil P-2.43 de gösterilen her bir periyodik işaret için Fourier seri açılımını belirleyin. Her bir işaret için trigonometrik Fourier serisini bulun.



Şekil P-2.43

2.44 Problem 2.43'de verilen işaretler giriş işareti olarak kullanılır ise aşağıdaki her bir DZD sistemin çıkışını belirleyin.

1. $H(f) = 10\Pi(\frac{f}{4})$

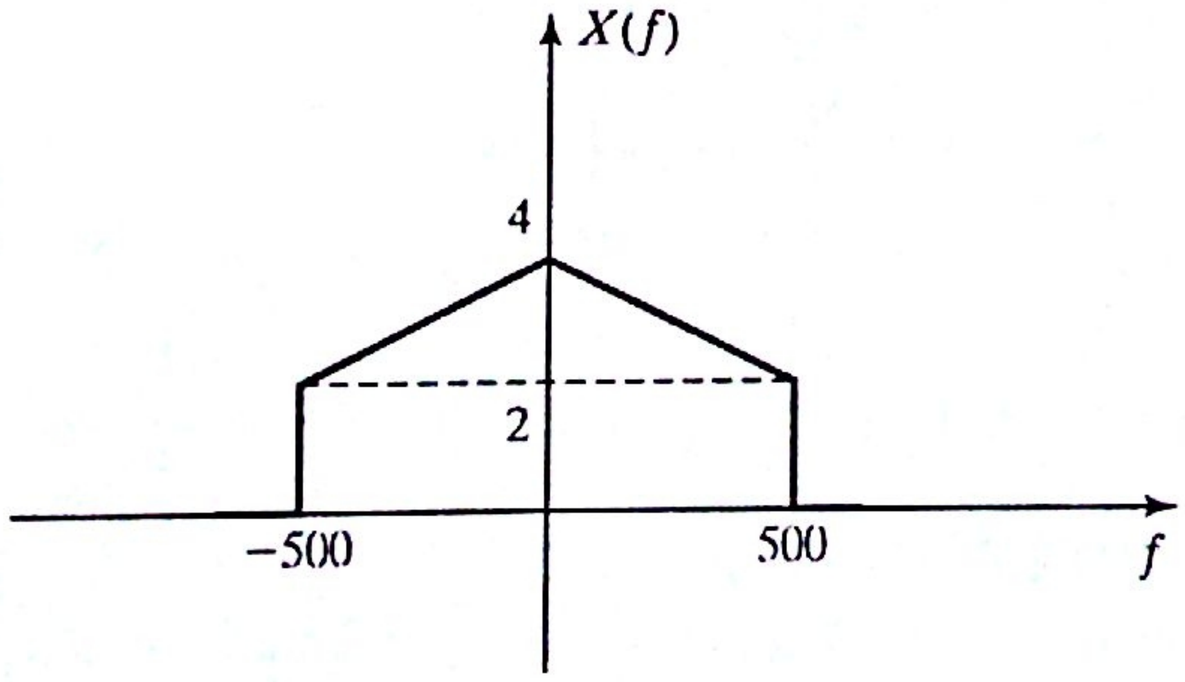
2. $$H(f)=\begin{cases}-j & 0<f\le 4\\ j & -4\le f<0\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

2.45 Sonlu güce sahip her bir fiziksel periyodik işaretin Fourier seri açılım katsayıları x_n'lerin $n\to\pm\infty$ için sıfıra gittiğini gösterin.

2.46 Aşağıdaki her bir işaret için Fourier dönüşümünü belirleyin (∞ pozitiftir).

1. $x(t)=\frac{1}{1+t^2}$
2. $\Pi(t-3)+\Pi(t+3)$
3. $\Lambda(2t+3)+\Lambda(3t-2)$
4. $4\Pi\left(\frac{t}{4}\right)\cos(2\pi f_0 t)$
5. $4\Pi\left(\frac{t-2}{4}\right)\cos(2\pi f_0 t)$
6. $\text{sinc}^3 t$
7. $t\,\text{sinc}t$
8. $t\cos 2\pi f_0 t$
9. $e^{-\alpha t}\cos(\beta t)$
10. $te^{-\alpha t}\cos(\beta t)$

2.47 Bir işaretin Fourier dönüşümü Şekil P-2.47'de gösterilmektedir. Bu durumda $x_1(t)=-x(t)+x(t)\cos(2000\pi t)+2x(t)\cos^2(3000\pi t)$ işaretinin Fourier dönüşümünü belirleyin ve çizin.



Şekil P2.47

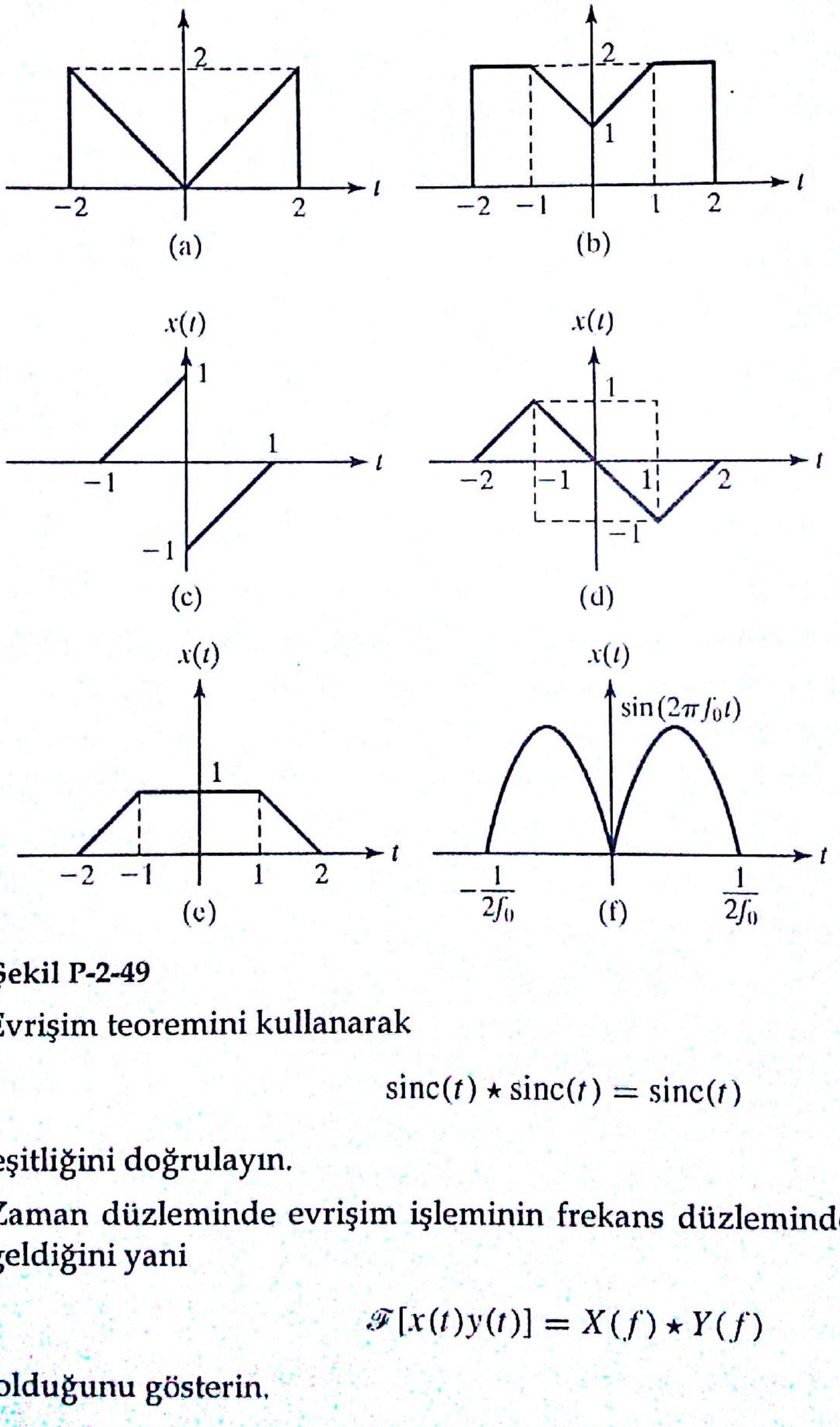
2.48 $\frac{1}{2}\delta(t+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\delta(t-\frac{1}{2})$ işaretinin Fourier dönüşümünün $\cos(\pi f)$ olduğunu gösterin. Aşağıdaki Fourier dönüşüm çiftinin doğrulunu ispat edin.

$$\mathcal{F}[\cos(\pi t)]=\frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)$$

ve

$$\mathcal{F}[\sin(\pi t)] = \frac{j}{2}\delta\left(f + \frac{1}{2}\right) - \frac{j}{2}\delta\left(f - \frac{1}{2}\right)$$

2.49 Şekil P-2.59'da verilen işaretlerin Fourier dönüşümlerini belirleyin.



Şekil P-2-49

2.50 Evrişim teoremini kullanarak

$$\text{sinc}(t) \star \text{sinc}(t) = \text{sinc}(t)$$

eşitliğini doğrulayın.

2.51 Zaman düzleminde evrişim işleminin frekans düzleminde çarpmaya karşılık geldiğini yani

$$\mathcal{F}[x(t)y(t)] = X(f) \star Y(f)$$

olduğunu gösterin.

2.52 $x(t)$ herhangi bir işaret olsun ve $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0)$ şeklinde tanımlansın.

1. $x_1(t)$ işaretinin periyodik olduğunu gösterin.
2. $x_1(t)$ işaretini $x(t)$ ve $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$ cinsinden nasıl yazabilirsiniz?
3. $x_1(t)$ işaretinin Fourier dönüşümünü $x(t)$ işaretinin Fourier dönüşümünü cinsinden ifade ediniz.

2.53 Fourier dönüşümünün özelliklerini kullanarak, aşağıdaki entegralleri hesaplayın (α pozitiftir).

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^5(t)\, dt$
2. $\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} \text{sinc}(t)\, dt$
3. $\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} \text{sinc}^2(t)\, dt$
4. $\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} \cos(\beta t)\, dt.$

2.54 $h(t) = e^{-\alpha t} u_{-1}(t)$ dürtü tepkisine sahip doğrusal zamanla değişmeyen bir sistem $x(t) = e^{-\beta t} u_{-1}(t)$ girişi ile sürülmektedir. $\alpha, \beta > 0$ olduğunu varsayalım. Frekans düzlemi analizi ile sistem çıkışını belirleyin. Çıkış güç tipli mi yoksa enerji tipli mi? Gücünü veya enerjisini hesaplayın.

2.55 $x(t)$ T_0 periyoduna sahip olsun ve $0 \le \alpha < T_0$ olsun.

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} x(t) & \alpha \le t < \alpha + T_0 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bir işaret tanımlayın ve $X_\alpha(f)x_\alpha(t)$'işaretinin Fourier dönüşümü olsun. Bu durumda her *n değerleri* için $X_\alpha(\frac{n}{T_0})$'in α'nın seçimine bağımlı olmadığını gösterin.

2.56
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{2\pi t}{T_s}}$$

eşitliğini kullanarak herhangi bir $x(t)$ ve herhangi bir T_s için aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu gösterin.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T_s}\right) e^{jn\frac{2\pi t}{T_s}}$$

Bu eşitlikten hareket ile *Poission'un toplam formülü* olarak adlandırılan aşağıdaki ilişkiyi elde edin.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T_s}\right)$$

2.57 Problem 2.56'da ele alınan Poission'un toplam formülünü kullanarak

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|n|}$
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\frac{n}{K}) = K$ tüm $K \in \{1, 2, \ldots\}$
3. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(\frac{n}{K}) = K$ tüm $K \in \{1, 2, \ldots\}$.

olduğunu gösterin.

2.58 Bir DZD sistemin $e^{-\alpha t}u_{-1}(t)$ girişine tepkisi $\delta(t)$'dır (Burada $(\alpha > 0)$). Frekans düzlemi analiz tekniklerini kullanarak, sistemin $x(t) = e^{-\alpha t}\cos(\beta t)u_{-1}(t)$ girişine tepkisini belirleyin.

2.59 Bir $x(t)$ girişi ile sürüldüğünde, dürtü tepkisi $h(t)$ olan bir DZD sistemin çıkışını aşağıdaki her bir durum için belirleyin.

1. $h(t) = \text{sinc}(t)$ $x(t) = \text{sinc}(t)$
2. $h(t) = \delta(t) + \delta'(t)$ $x(t) = e^{-\alpha|t|}$, $(\alpha > 0)$
3. $h(t) = e^{-\alpha t}u_{-1}(t)$ $x(t) = e^{-\beta t}u_{-1}(t)$, $(\alpha, \beta > 0)$
   ($\alpha = \beta$ olduğu durumu ayrı olarak ele alın.)
4. $h(t) = e^{-\alpha t}\cos(\beta t)u_{-1}(t)$ $x(t) = e^{-\beta t}u_{-1}(t)$, $(\alpha, \beta > 0)$
   ($\alpha = \beta$ olduğu durumu ayrı olarak ele alın.)
5. $h(t) = e^{-\alpha|t|}u_{-1}(t)$ $x(t) = e^{-\beta t}u_{-1}(t)$, $(\alpha, \beta > 0)$
   ($\alpha = \beta$ olduğu durumu ayrı olarak ele alın.)
6. $h(t) = \text{sinc}(t)$ $x(t) = \text{sinc}^2(t)$

2.60 Bir DZD sistemin $x(t) = \sin c(t)$ girişine tepkisi $y(t) = \sin c^2(t)$ olabilir mi? Cevabınızı gerekçelendirin.

2.61 Bir DZD sistemin $\Pi(t)$ girişine tepkisi $\Lambda(t)$ olsun.

1. Bu sistemin $x(t) = \cos 2\pi t$ girişine tepkisini yukarıda verilen bilgiden hareket ile bulabilir misiniz?
2. $h_1(t) = \Pi(t)$ ve $h_2(t) = \Pi(t) + \cos 2\pi t$ ifadelerinin bu sistemin dürtü tepkisi olabileceğini ve dolayısı ile $\Pi(t)$ girişine sistemin tepkisinin sistemini tekil olarak belirleyemeyeceğini gösterin.
3. Bir DZD sistemin $u_{-1}(t)$ girişine tepkisi sistemi tekil olarak belirleyebilir mi? Bazı $\alpha > 0$ için $e^{-\alpha t}u_{-1}(t)$ girişine sistemin tepkisi sistemi tekil olarak belirleyebilir mi? Genel olarak $x(t)$ hangi koşulları sağlamalı ki sistem ilgili çıkışından hareket ile sistem tekil olarak belirlenebilsin?

2.62 $A\sin(2\pi f_0 t + \theta)$ ifadesinin Hilbert dönüşümünün $-A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ olduğunu gösterin.

2.63 $e^{j2\pi f_0 t}$ işaretinin Hilbert dönüşümünün $-j\,\text{sgn}(f_0)e^{j2\pi f_0 t}$ olduğunu gösterin.

2.64

$$\mathcal{F}\left[\widehat{\frac{d}{dt}x(t)}\right] = 2\pi |f| \cdot \mathcal{F}[x(t)]$$

olduğunu gösterin.

2.65 Bir işaretin türevinin Hilbert dönüşümünün, bu işaretin Hilbert dönüşümünün türevine eşit olduğunu gösterin.

2.66 Frekans bileşenleri f_0 (ve $-f_0$) civarında olan bir darband $x(t)$ işareti, transfer fonksiyonu $H(f)$ olan bir süzgeçten geçiriliyor ve çıkış $y(t)$ olarak ifade ediliyor. Transfer fonksiyonunun genlik büyüklüğü $A(f)$ ile ve fazı $\theta(f)$ ile gösterilmektedir. Varsayalım ki süzgecin transfer fonksiyonu işaretin bandgenişliği içerisinde öylesine düzgün ki transfer fonksiyonunun genlik büyüklüğü sabit kabul edilebilir ve fazı birinci dereceden Taylor seri açılımı kullanılarak ifade edilebilir. Yani

$$A(f) \approx A(f_0)$$

$$\theta(f) \approx \theta(f_0) + (f - f_0)\theta'(f)|_{f=f_0}$$

1. Çıkışın alçak geçiren eşdeğerinin Fourier dönüşümünün, $Y_l(f)$,

$$Y_l(f) \approx X_l(f)A(f_0)e^{j\left(\theta(f_0)+f\theta'(f)|_{f=f_0}\right)}$$

şeklinde yazılabileceğini gösterin.

2.

$$y(t) \approx A(f_0) + V_x(t - t_g)\cos(2\pi f_0 t - t_p)$$

olduğunu gösterin. Burada $V_x(t)$ $x(t)$ işaretinin zarfı ve

$$t_g = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(f)}{df}\Big|_{f=f_0}$$

$$t_p = -\frac{1}{2\pi}\frac{\theta(f)}{f}\Big|_{f=f_0}$$

3. t_g ve t_p sırası ile *zarf gecikmesi (veya grup gecikmesi)* ve *faz gecikmesi* olsun. Bunların etkisini yorumlayabilir ve neden bu isimleri aldığını gerekçelendirebilir misiniz?

2.67 Hilbert dönüşümünün işaretin frekans bileşenleri üzerinde 90^0 faz kayması oluşturduğunu ve bir dik (quadrature) süzgecin transfer fonksiyonunun

$$H(f) = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}} & f < 0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebileceğini gördük.

Bu çerçeve, bir işaretin frekans bileşenleri üzerinde θ faz kayması oluşturan yeni bir dönüşüm için

$$H_\theta(f) = \begin{cases} e^{-j\theta} & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ e^{j\theta} & f < 0 \end{cases}$$

tanımlaması ile genelleştirilebilir. Bu dönüşümün sonucunda elde edilen işaret $x_\theta(t)$ yani $X_\theta(f) = X(f)H_\theta(f)$, ile gösterilsin. Burada $X_\theta(f)x_\theta(t)$ işaretinin Fourier dönüşümüdür.

$x(t)$ işaretinin herhangi bir DC bileşen içermediğini varsayalım.

1. Bu dönüşümü gerçekleştiren süzgecin dürtü tepkisini $h_\theta(t)$ bulun.
2. $x_\theta(t)$'nin, $x(t)$ işareti ve Hilbert dönüşümünün doğrusal kombinasyonu olduğunu gösterin.
3. Eğer $x(t)$ bir enerji-tipli bir işaret ise $x_\theta(t)$'nin de enerji tipli bir işaret olacağını ve enerjisinin $x(t)$ işaretinin enerji içeriğine eşit olduğunu gösterin.

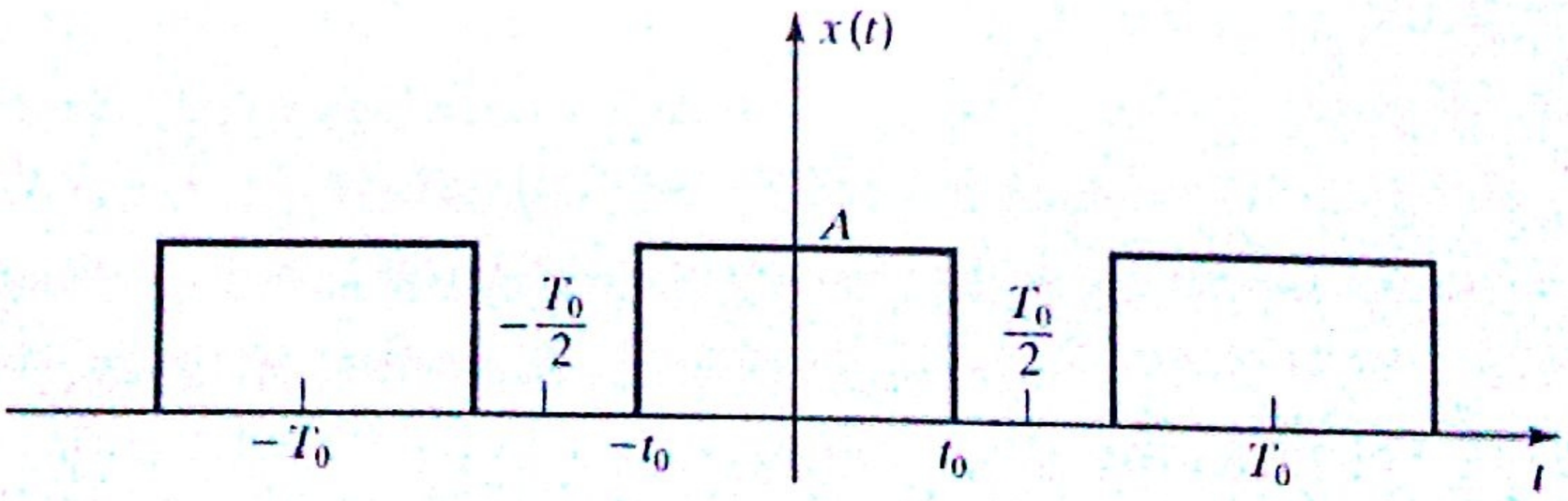
BİLGİSAYAR PROBLEMLERİ

2.1 Fourier Serileri

Bu problemin amacı bir periyodik işaretin Fourier seri katsayılarının bulunması ve çizilmesidir. $x(t)$ periyodik işareti, T_0 periyoduna sahip ve $|t| \le T_0/2$ için

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{2t_0}\right) = \begin{cases} A, & |t| \le t_0 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $t_0 < T_0/2$ dır. Şekil CP-2.1'de $x(t)$ işaretinin grafiği gösterilmiştir. $A = 1$, $T_0 = 4$ ve $t_0 = 1$ olarak alın.



Şekil CP-2.1 $x(t)$ işareti

1. $x(t)$ açılımında Fourier seri katsayılarının

$$x_n = \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\sin(n\pi/2)}{\pi n}$$

olarak verilebileceğini matematiksel olarak gösterin.

2. MATLAB kullanarak orijinal $x(t)$ işaretini ve $x(t)$ işaretinin Fourier seri yaklaşımını $n = 1, 3, 5, 7$ ve 9 için çizin. n değerinin artması ile yaklaşık işaretin orijinal işarete, $x(t)$, daha çok benzeştiğine dikkat edin.

3. $|n| \le 20$ için ayrık genlik tayfını $|x_n|$ ve faz tayfını $\angle x_n$ çizin.

2.2 Periyodik işaretlerin süzgeçlenmesi

Bu problemin amacı periyodik bir işaretin doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemden geçirilmesinin etkilerini göstermektir. *x(t) periyodik işareti* periyodu T_0 olan üçgen darbe işaretidir ve bir periyot boyunca

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \le t \le 0 \\ -t+1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. DZD süzgecin frekans tepkisi ise

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}.$$

olarak verilmiştir.

1. $x(t)$ işaretinin Fourier seri katsayıları matematiksel olarak

$$x_n = \frac{1}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right).$$

şeklinde verildiğini gösterin.

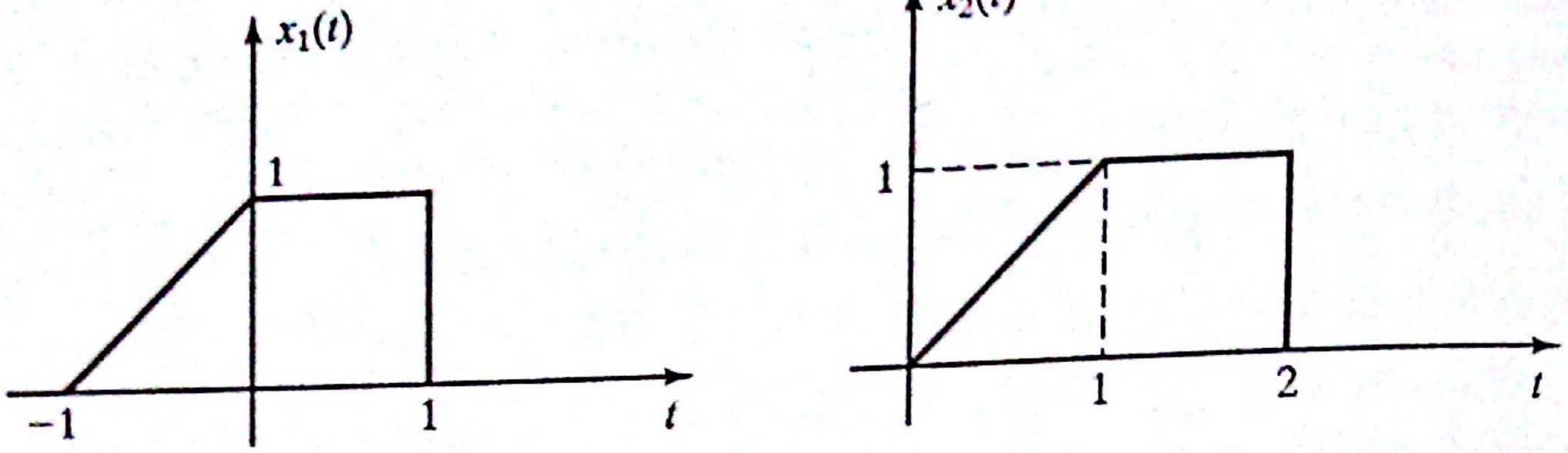
2. $0 \le |n| \le 10$ aralığı için $\{x_n\}$ tayfını MATLAB kullanarak çiziniz.

3. Giriş işareti $x(t)$'in temel frekansı $F_0 = T_0 = 1/2$ ise, süzgeç çıkışının Fourier seri katsayıları $y_n = x_n H(n/2)$ olduğunu gösterin. Süzgeç çıkışının ayrık tayfını $\{y_n\}$ çiziniz.

4. Tek bir grafik üzerinde, $n = 1,3,....,9$ için süzgeç çıkışın Fourier seri yaklaşımını çizin. Sonuçlar üzerinde yorum yapınız.

2.3 Fourier Dönüşümü

Şekil CP-2.3 de verilen iki işaretin genlik ve faz tayfını çizin. $x_2(t)$ İşaretinin $x_1(t)$ işaretinin zamanda ötelenmiş versiyonu olduğuna dikkat edin. Bundan dolayı, iki işaretin aynı genlik tayfına sahip olmasını bekleriz.



Şekil CP-2.3. $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ işaretleri

2.4 Frekans Düzleminde DZD Sistem İncelemesi

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

İşareti bir alçak geçiren süzgeçten geçmektedir. Süzgecin frekans tepkisi

$$H(f) = \begin{cases} \cos(\pi f/3) & |f| \leq 1.5 \text{ Hz} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak verildiğine göre

1. $x(t)$ giriş işaretinin genlik ve faz tayfını bulun ve iki ayrı grafik üzerinde çiziniz.
2. $y(t)$ çıkış işaretinin genlik ve faz tayfını çiziniz.
3. Çıkış işaretinin ters Fourier dönüşümünü MATLAB kullanarak bulunuz ve çiziniz.

2.5 Bandgeçiren Alçakgeçiren Dönüşüm

$$x(t) = \text{sinc}(100t)\cos(400\pi t)$$

İşareti frekans içeriği $f_0 = 200$ Hz etrafında yoğunlaşmış olan bir bandgeçiren işarettir.

1. $x(t)$ işaretini ve genlik spektrumunu $|X(f)|$ çizin.
2. $f_0 = 200$ Hz kabulü ile eşdeğer alçak geçiren işareti belirleyin ve genlik tayfını çizin. Ayrıca, $x(t)$'in aynı-fazda ve dik bileşenleri ile $x(t)$'in zarfını çizin.

2.6 *MATLAB remez fonksiyonunu kullanarak aşağıda verilen özellikleri sağlayan en düşük derece (yani en küçük uzunluğa) sahip FIR alçak geçiren süzgeci tasarlayın.*

Geçişbandı: $0 \le \omega \le 0.4\pi$

Durdurma bandı: $0.5\pi \le \omega \le \pi$

Geçişbandı salınımı: 0.5 dB

Durdurma Bandı salınımı: 40 dB

1. *FIR süzgecin dürtü tepki katsayılarını çizin.*
2. *Süzgecin frekans tepkisinin genlik ve fazını çizin.*

2.7 *FIR Hilbert Dönüşüm Süzgeci*

MATLAB remez fonksiyonunu kullanarak aşağıda verilen özellikleri sağlayan en düşük derece (yani en küçük uzunluğa) sahip FIR Hilbert dönüşüm süzgeci tasarlayın.

Geçisbandı: $0.1\pi \le |\omega| \le 0.5\pi$

Durdurma bandı: $0.6\pi \le |\omega| \le \pi$

Geçişbandı salınımı: δ_1 0.01 dB

Durdurma Bandı salınımı: δ_2 0.01 dB

1. *FIR süzgecin dürtü tepki katsayılarını çizin.*
2. *Süzgecin frekans tepkisinin genlik ve fazını çizin.*

2.8 *FIR Türev Alıcı*

$0.1\pi < \omega < 0.6\pi$ frekans aralığında bir geçirme bandına sahip 25-dallı bir FIR türev alıcı tasarımını remez fonksiyonu kullanarak gerçekleştiriniz.

1. Süzgecin dürtü tepkisini çizin.
2. Frekans tepkisinin genliğini çizin.
3. 100 adet

$$x(n) = 5\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Periyodik işaret örneği oluşturun ve bunları türev alıcıdan geçiriniz. Süzgeç çıkışı $y(n)$ ile $x(n)$'i karşılaştırın. FIR süzgeç çıkışında 12 örneklik bir gecikme olduğuna dikkat ediniz.

3

Genlik Modülasyonu

Bilgi kaynaklarının büyük bir çoğunluğu analog işaret üretir. Analog işaretler doğrudan modüle edilebilir ve iletilebilir veya sayısal veriye dönüştürülerek sayısal modülasyon teknikleri kullanılarak iletilebilir. Analog-sayısal dönüşüm kavramı Bölüm 7'de ele alınacaktır.

Ses, müzik, görüntü ve video analog işaret örnekleridir. Bu işaretlerin her biri kendi bandgenişliği, dinamik aralığı ve işaretin doğası ile karakterize edilir. Örneğin, ses işareti ve siyah-beyaz video işaretlerinin her biri hava basıncı veya ışık şiddetinin değişimi gibi tek bir bileşene sahiptir. Fakat renkli videoda ise, işaret, kırmızı, yeşil ve mavi bileşenlere ek olarak ışık şiddetini içeren dört bileşene sahiptir. Dört video işaretine ek olarak ses işareti renkli TV yayıncılığında ses bilgisini iletir. Farklı analog işaretler işaret bandgenişliği açışından oldukça büyük farklılık göstermektedir. Örneğin, konuşma ses işaretleri 4 kHz'lik bir bandgenişliğine sahip iken, müzik işaretleri tipik olarak 20 kHz'lik bir bandgenişliğine ve video işaretleri ise yaklaşık 6 MHz gibi çok daha büyük bandgenişliğine sahiptir.

Analog işaretlerin sayısal iletimi yönündeki genel eğilime rağmen, halen özellikle ses ve video yayıncılığında büyük oranda analog işaretlerin iletimi söz konusudur. Bölüm 3 ve Bölüm 4'de taşıyıcı modülasyon kullanılarak analog işaretlerin iletimi ele alınacaktır. (Bu sistemlerin gürültü altındaki performansı Bölüm 6'da ele alınmıştır.) Bir analog işaretin iletimi bu işaretin sinüzoidal taşıyıcı işaretin genlik, faz veya frekansı üzerinde meydana getirdiği değişim ile ele alınacaktır. Analog işaretin tekrar elde edilmesi için taşıyıcılı modülasyonlu işaretlerin demodülasyonu için gerekli yöntemler de ayrıca tanımlanacaktır. Bu bölüm bilgi işaretinin, taşıyıcının genliğinin değiştirdiği genlik modülasyonlu sistemlere ayrılmıştır. Bölüm 4 ise mesaj işaretindeki değişime paralel olarak taşıyıcı işaretin fazı veya frekansında değişim oluşturan faz ve frekans modülasyonlu sistemlere ayrılmıştır.

3.1 MODÜLASYONA GİRİŞ

İletilecek analog işaret $m(t)$ olarak gösterilsin. Bu işaretin W bandgenişliğine sahip alçak geçiren bir işaret olduğu kabul edilecektir; yani $|f| > W$ için $M(f) \equiv 0$. Bu işaretin güç içeriği

$$P_m = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |m(t)|^2 \, dt$$

şeklinde ifade edilir. $m(t)$ mesaj işareti,

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_c) \tag{3.1.1}$$

formundaki bir *taşıyıcı* işaretin üzerinde yapacağı değişim vasıtası ile, haberleşme kanalında iletilir. Yukarıdaki ifadede A_c taşıyıcı genliği, f_c taşıyıcı frekansı ve ϕ_c taşıyıcı fazıdır. ϕ_c faz değeri zaman orijinin seçimine bağımlıdır. Genellemeden herhangi bir kayıp olmadan, zaman orijininin $\phi_c = 0$ olacak şekilde seçildiği varsayımı yapılsın. Eğer modülasyon işleminden sonra taşıyıcı işaretin genlik, frekans veya fazı $m(t)$ mesaj işaretinin bir fonksiyonu şeklinde ifade edilebiliyor ise bu durumda $m(t)$ işaretinin $c(t)$ işaretini genlik, frekans veya faza bağımlı olarak modüle ettiğini söyleyebiliriz. Gerçekte modülasyon işlemi, alçakgeçiren bir işaret olan $m(t)$ işaretini taşıyıcı frekansı f_c etrafında bir bandgeçiren işaret haline dönüştürür.

Taşıyıcı işaret $c(t)$'in mesaj işareti $m(t)$ tarafından modüle edilmesi aşağıdaki hedeflerden biri veya daha fazlasını gerçekleştirmeyi amaçlar:

(1) Alçak geçiren işaretin frekansını kanalın geçirme bandına taşımak. Böylece iletilecek bandgeçiren işaret tayfını, kanalın geçirme bandının karakteristiğine uygun hale getirmek. Örneğin telefon haberleşmesinde, ses işaretinin radyolink hattı üzerinden iletimi esnasında, kanal üzerinden iletim için, iletim frekansı gigahertz seviyelerine çıkarılmalıdır. Bunun anlamı bir modülasyon veya farklı modülasyon tekniklerinin bileşimi ile ses işaretini (4 kHz'e kadar olan) alçak frekans bölgesinden gigahertz bölgesine taşımaktır.

(2) Yüksek frekans kullanarak vericinin yapısının basitleştirilmesi. Örneğin elektromanyetik dalgalar kullanarak bilginin iletimi esnasında, işaretin alçak frekanslarda iletimi oldukça büyük anten gerektirir. Modülasyon, frekans bandının daha yüksek frekanslara taşınmasını sağlayarak daha küçük anten gereksinimi oluşturur. Bu vericinin (ve tabii ki alıcının) yapısını basitleştirir.

(3) Farklı mesaj kaynaklarından gelen işaretlerin eşzamanlı iletimini, frekans bölmeli çoğullama tekniği (Altbölüm 3.4'e bakın) kullanılarak, mümkün kılmak

(4) Gürültülü bir kanalda iletim esnasında gürültü ve karışım bağışıklılığını iyileştirmek için iletilen işaretin bandgenişliğini artırmak. Bu durum Bölüm 6'da açı modülasyonu konusunda ele alınacaktır.

Yukarıdaki (1), (2) ve (3) nolu hedefler bu bölümde ele alacağımız tüm modülasyon yöntemleri tarafından karşılanır. (4) nolu hedef ise $m(t)$ işaretini daha geniş bir banda yayan ve Bölüm 4'de ele alınacak olan açı modülasyonu tarafından karşılanır.

Aşağıdaki alt bölümlerde, analog işaretlerin taşıyıcı-genlik modülasyonu (GM) kullanılarak iletimi ve alınmasını incelenecektir.

3.2 GENLİK MODÜLASYONU (GM)

Genlik modülasyonunda $m(t)$ mesaj işareti $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$ taşıyıcı işaretinin genliği üzerinde değişim oluşturur. Bu işlem sonucunda genliği $m(t)$ mesaj işaretinin bir fonksiyonu olan bir sinüzoidal işaret oluşturur. Taşıyıcı işaretin, $m(t)$ mesaj işareti tarafından genliğinin modüle edilmesinin farklı yöntemleri vardır. Bu yöntemlerin her biri iletilecek işaret için farklı spektral karakteristikler oluşturur. Bu yöntemler (a) Çift yanband, taşıyıcısı bastırılmış GM, (b) geleneksel çift yanband GM, (c) Tek yanband GM ve (d) artık-yanband GM yöntemleridir ve her biri aşağıda ele alınacaktır.

3.2.1 Çift-Yanband Taşıyıcısı Bastırılmış GM

Çift yanband, taşıyıcısı bastırılmış (ÇYB-TB: Double-sideband, suppressed carrier-DSB-SC) $m(t)$ mesaj işaretin taşıyıcı işaret $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$ ile çarpımı sonucunda oluşur. Böylece, genlik modülasyonlu bir işaret elde edilir.

$$\begin{aligned} u(t) &= m(t)c(t) \\ &= A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

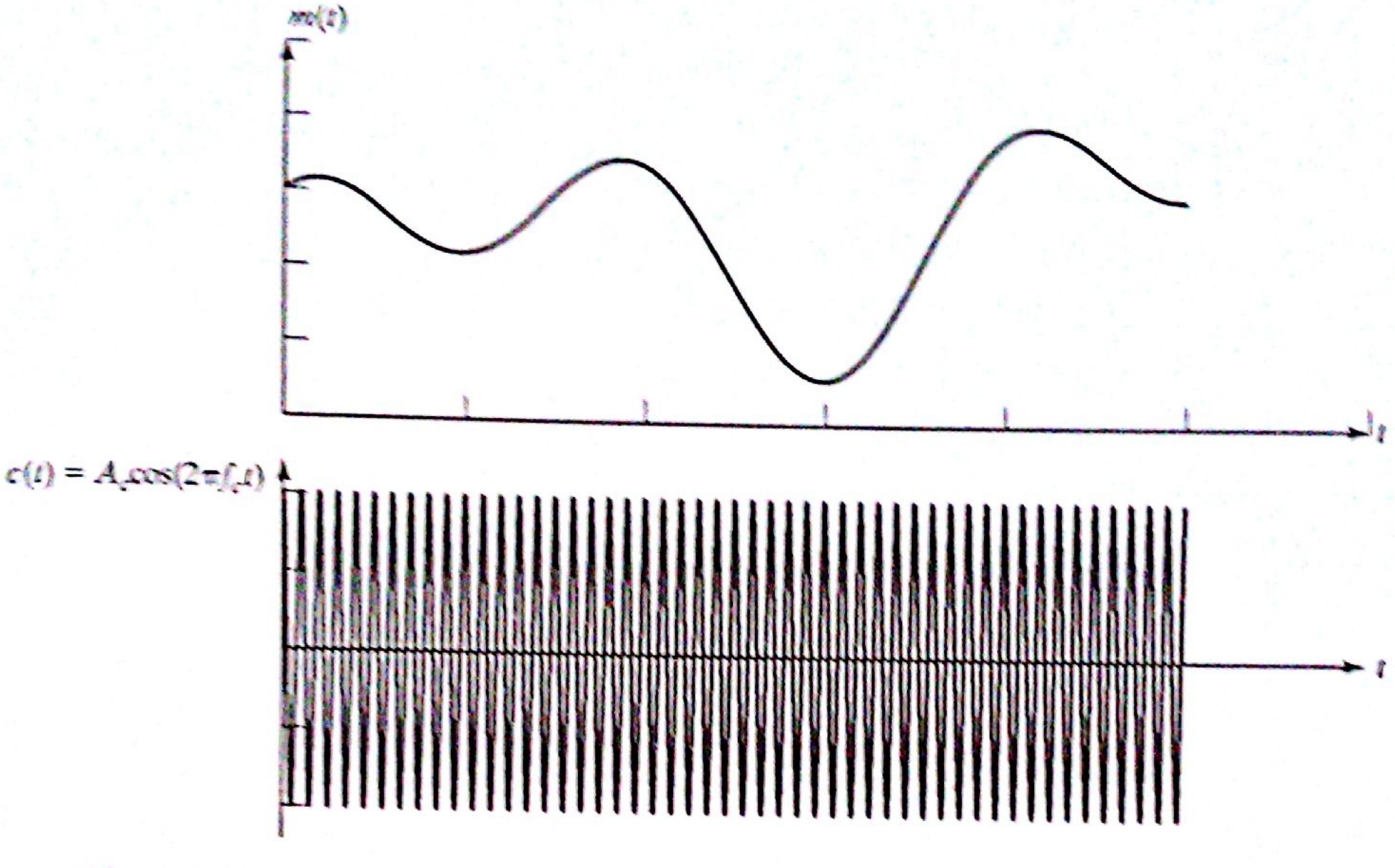
Şekil 3.1'de bir örnek, mesaj işareti $m(t)$, taşıyıcı işaret $c(t)$ ve modüle edilmiş işaret $u(t)$ için gösterilmiştir. Bu örnekte bağıl olarak yavaş değişen bir $m(t)$ mesaj işaretinin, daha hızlı değişen bir $u(t)$ işaretine dönüştürüldüğü görülmektedir. Zamandaki bu hızlı değişiminden dolayı bu işaret daha yüksek frekans bileşenleri içerir. Aynı zamanda, modüle edilmiş işaret mesaj işaretinin temel karakteristiklerini korur. Böylece alıcı tarafta mesaj işaretinin yeniden elde edilmesinde kullanılabilir.

ÇYB-TB GM İşaretin Tayfı. Modüle edilmiş işaretin tayfı $u(t)$'in Fourier dönüşümüm alınarak ve (2.3.14) örneğinin sonuçları kullanılarak elde edilebilir. Böylece

$$U(f) = \frac{A_c}{2}\left[M(f - f_c) + M(f + f_c)\right]$$

elde edilir. Şekil 3.2 $M(f)$ ve $U(f)$ için genlik ve faz tayfı göstermektedir.

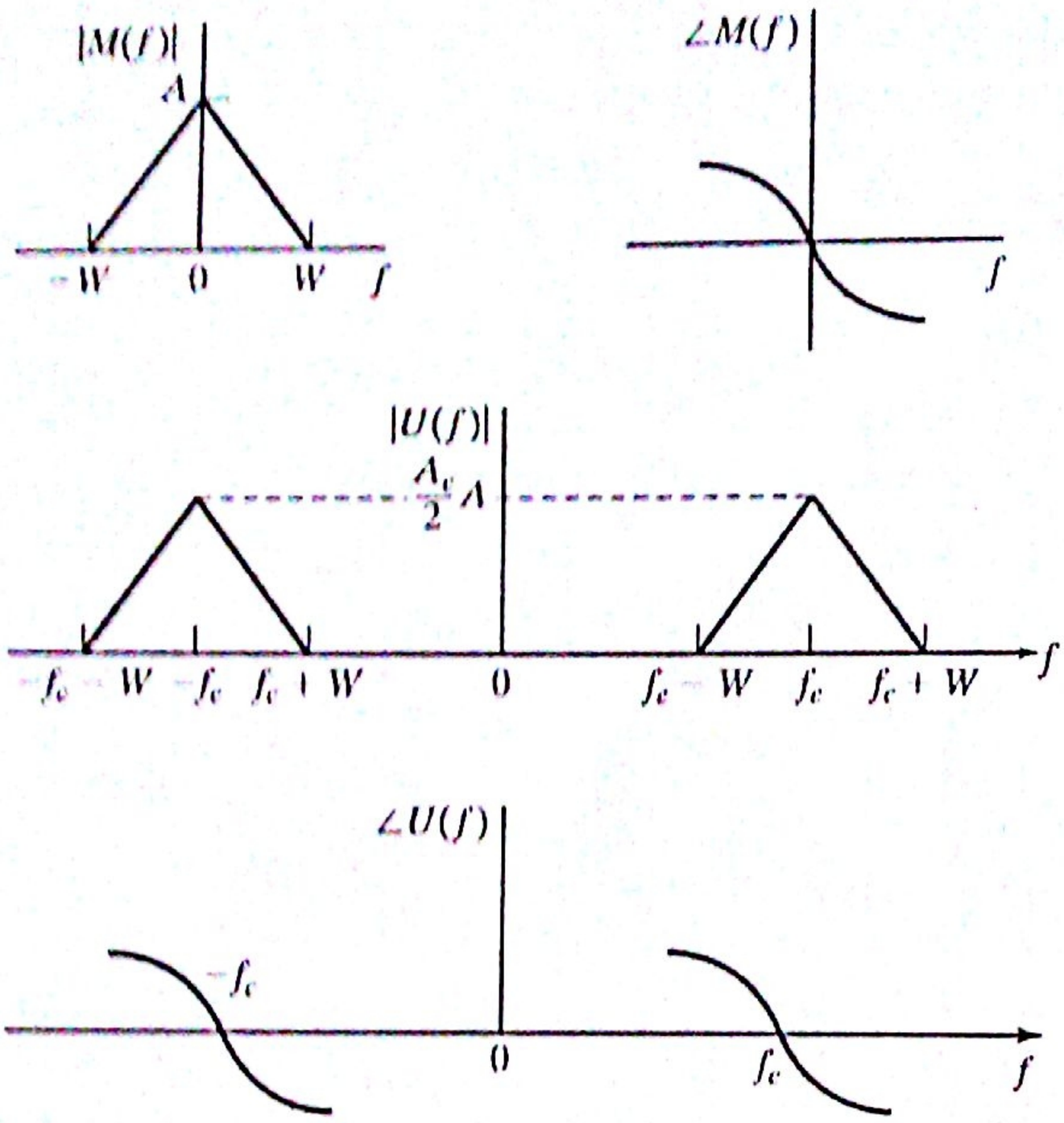
$m(t)$ mesaj işaretinin genlik tayfı frekansta f_c kadar ötelenmiştir. Ayrıca, $m(t)$ mesaj işaretinin bandgenişliği W iken, genlik modulasyonlu işaretin kapsadığı bandgenişliği $2W$'dir.



Şekil 3.1 Mesaj işareti, taşıyıcı ve ÇYB-TB modülasyonlu işaret örneği

Bundan dolayı $u(t)$ işaretini iletmek için gerekli olan kanal bandgenişliği $B_c=2W$ olur.

$u(t)$ işaretinin, $|f|>f_c$ frekans bandındaki, frekans bileşenleri, *U(f)'in üst yanbandı* olarak isimlendirilir iken $|f|<f_c$ frekans bandındaki frekans bileşenleri ise *alt yanband* olarak isimlendirilir. $U(f)$'in her iki yanbandının da $M(f)$'de mevcut tüm frekansları içerdiğini gözlemlemek önemlidir. Yani $f>f_c$ için $U(f)$'in frekans içeriği, $f>0$ için $M(f)$ frekans içeriğine denktir, aynı şekilde yani $f<-f_c$ için $U(f)$'in frekans içeriği $f<0$ için $M(f)$ frekans içeriğine karşılık gelir. Dolayısı ile $U(f)$ üst yanbandı $M(f)$ *de* mevcut tüm frekansları içerir. Aynı durum *U(f)'nin* alt yanbandı için geçerlidir. Dolayısı ile *U(f)'in* alt yanbandı $M(f)$ mesaj işaretinin tüm frekans bileşenlerine sahiptir. $U(f)$ hem üst ve hem de alt yanbandı içerdiği için *çift yanband (ÇYB) GM işaret* olarak isimlendirilir.



Şekil 3.2. *m(t)* mesaj işareti ve *u(t)* ÇYB-GM modülasyonlu işaret genlik ve faz tayfı

Modülasyonlu işareti *u(t)*'in diğer karakteristiği bir taşıyıcı bileşen içermemesidir. Yani iletilen tüm güç modüle edici (mesaj) işareti *m(t)* üzerindedir. Bu durum *U(f)* tayfında açık olarak görülmektedir. *m(t)* DC bileşen içermediği sürece, $f=f_c$ noktasında bir dürtü oluşmayacaktır; Oysa *u(t)'in* taşıyıcı bileşeni içerdiği durumlarda bu durum yani dürtü oluşumu söz konusu olacaktır. Bundan dolayı *u(t) taşıyıcısı bastırılmış işaret* olarak isimlendirilir. Dolayısı ile *u(t)* bir ÇYB-TB GM işarettir.

Örnek 3.2.1

m(t) işaretinin

$$m(t) = a\cos 2\pi f_m t \qquad f_m \ll f_c$$

formunda bir sinüzoidal işaret olduğunu varsayalım. ÇYB-TB GM işareti ve üst ve alt yanbandlarını belirleyin.

Çözüm ÇYB TB GM zaman düzleminde

$$u(t) = m(t)c(t) = A_c a\cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_c t)$$

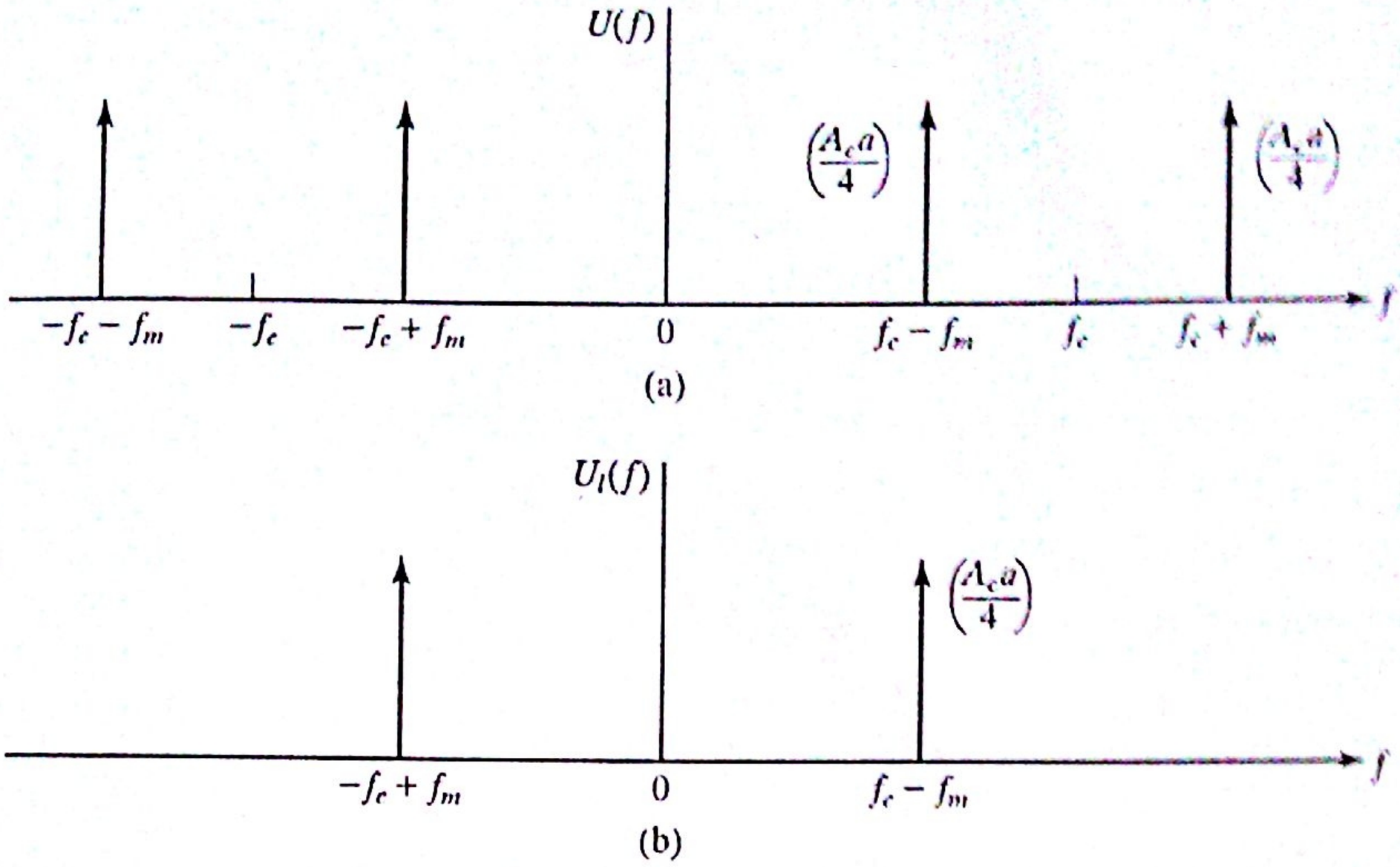
$$= \frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c - f_m)t] + \frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c + f_m)t]$$

şeklinde ifade edilmiştir. Fourier dönüşümü alındığında, modüle edilmiş işaret frekans düzleminde

$$U(f) = \frac{A_c a}{4}[\delta(f - f_c + f_m) + \delta(f + f_c - f_m)]$$

$$+ \frac{A_c a}{4}[\delta(f - f_c - f_m) + \delta(f + f_c + f_m)]$$

formunu alacaktır.



Şekil 3.3 (a) Bir Sinüzoidal mesaj işareti için ÇYB-TB GM işaretin (genlik) tayfı (b) alt yanband ve (c) üst yanbandlar

Bu spektrum Şekil 3.3(a)'da gösterilmiştir. $u(t)$ alt yanbandı

$$u_\ell(t) = \frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c - f_m)t]$$

şeklinde bir işarettir ve tayfı Şekil 3.3(b)'de gösterilmiştir. Son olarak $u(t)$ üst yanbandı

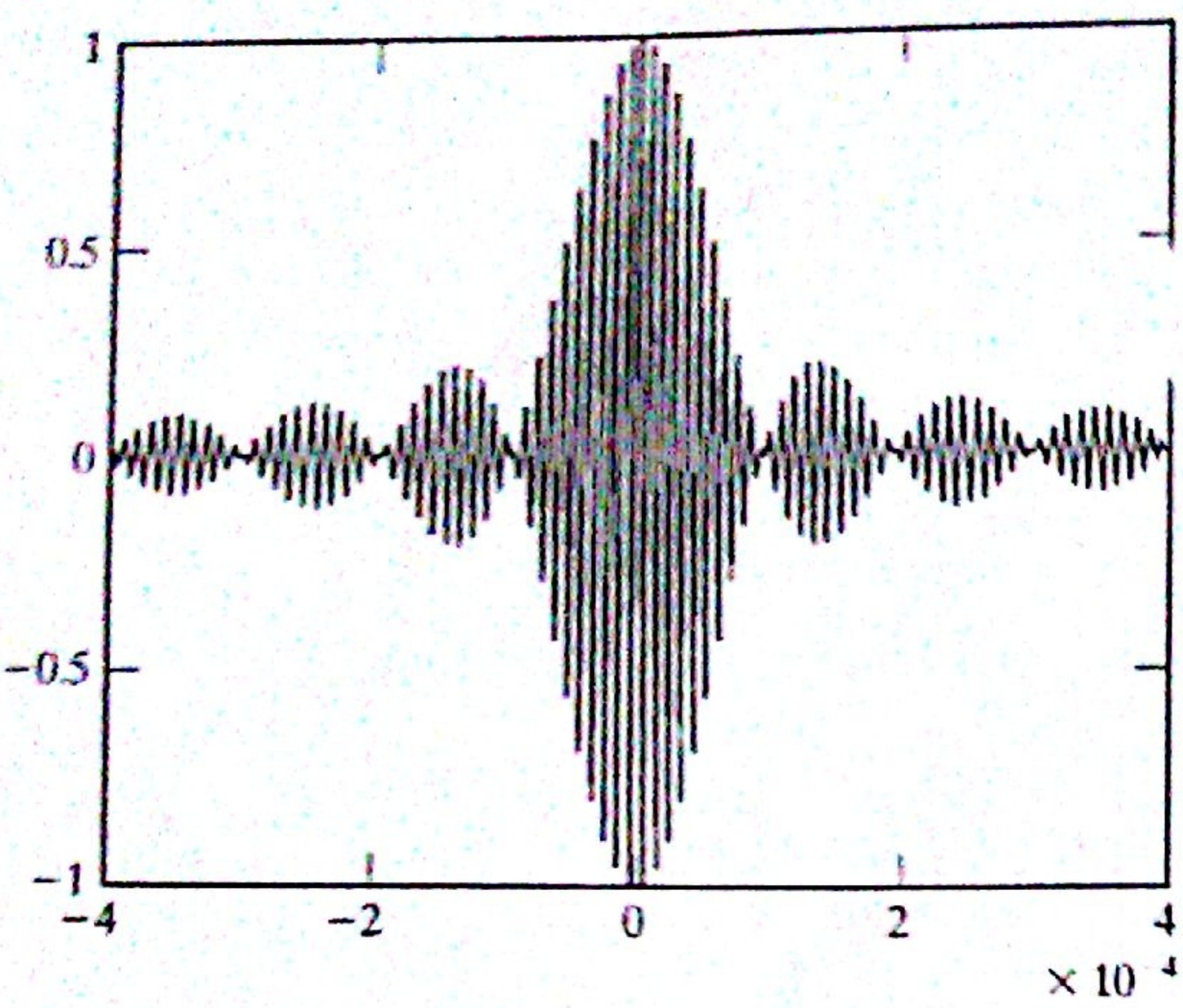
$$u_u(t) = \frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c + f_m)t]$$

şeklinde bir işarettir ve tayfı Şekil 3.3(c)'de gösterilmiştir.

Örnek 3.2.2

Mesaj işareti $m(t) = \text{sinc}(10^4 t)$ olsun. Taşıyıcı frekansı 1 MHz olan bir sinüzoidal olur ise, bu durumda ÇYB-TB modülasyonlu işareti ve bandgenişliğini belirleyin.

Çözüm Bu örnekte, $c(t) = \cos(2\pi \times 10^6 t)$ şeklindedir. Dolayısı ile $u(t) = \text{sinc}(10^6 t)\cos(2\pi \times 10^6 t)$ olur. Şekil 3.4'de $u(t)$'in çizimi verilmiştir. Modülasyonlu işaretin band



Şekil 3.4 $u(t) = \sin c(10^4 t)\cos(2\pi \times 10^6 t)$ 'in grafigi

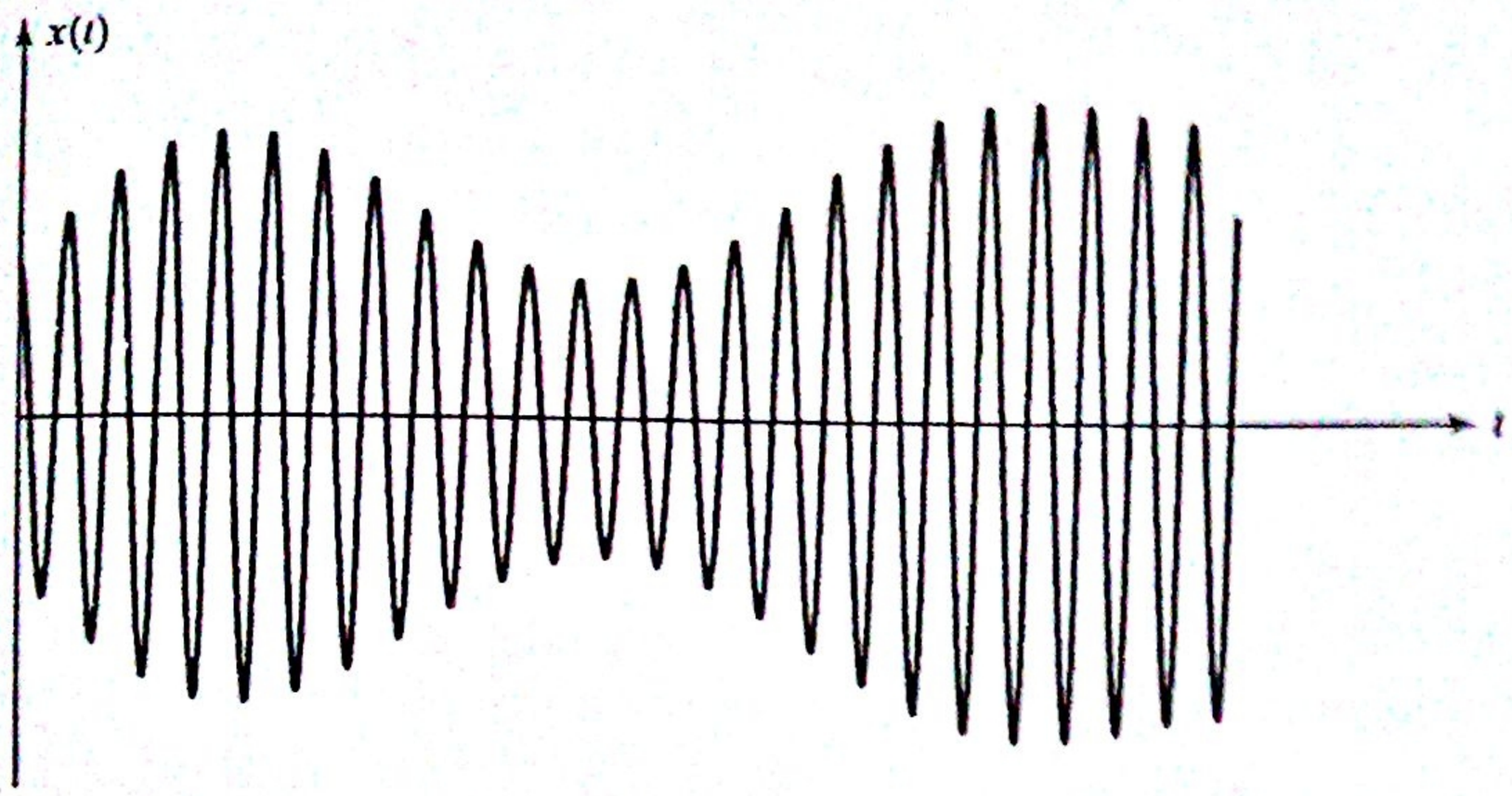
genişliğini elde etmek için ilk olarak mesaj işaretinin bandgenişliğini belirlemeliyiz. $M(f) = \mathcal{F}\,\text{sinc}(10^4 t) = 10^{-4}\Pi(10^{-4} f)$ olur. Fourier dönüşümü -5000 ile 5000 Hz frekans aralığında sabit ve diğer frekanslarda sıfırdır. Dolayısı ile mesaj işaretinin bandgenişliği *W=5000* Hz olur ve modülasyonlu işaretin bandgenişliği mesaj işaretinin bandgenişliğinin iki katıdır. Yani 10000 Hz veya 10 kHz.

ÇYB-TB İşaretin Güç İçeriği. ÇYB-TB işaretinin güç içeriğini hesaplamak için, Denklem (2.1.11)'de verilen bir işaretin güç içeriği tanımını kullanalım. Bu durumda

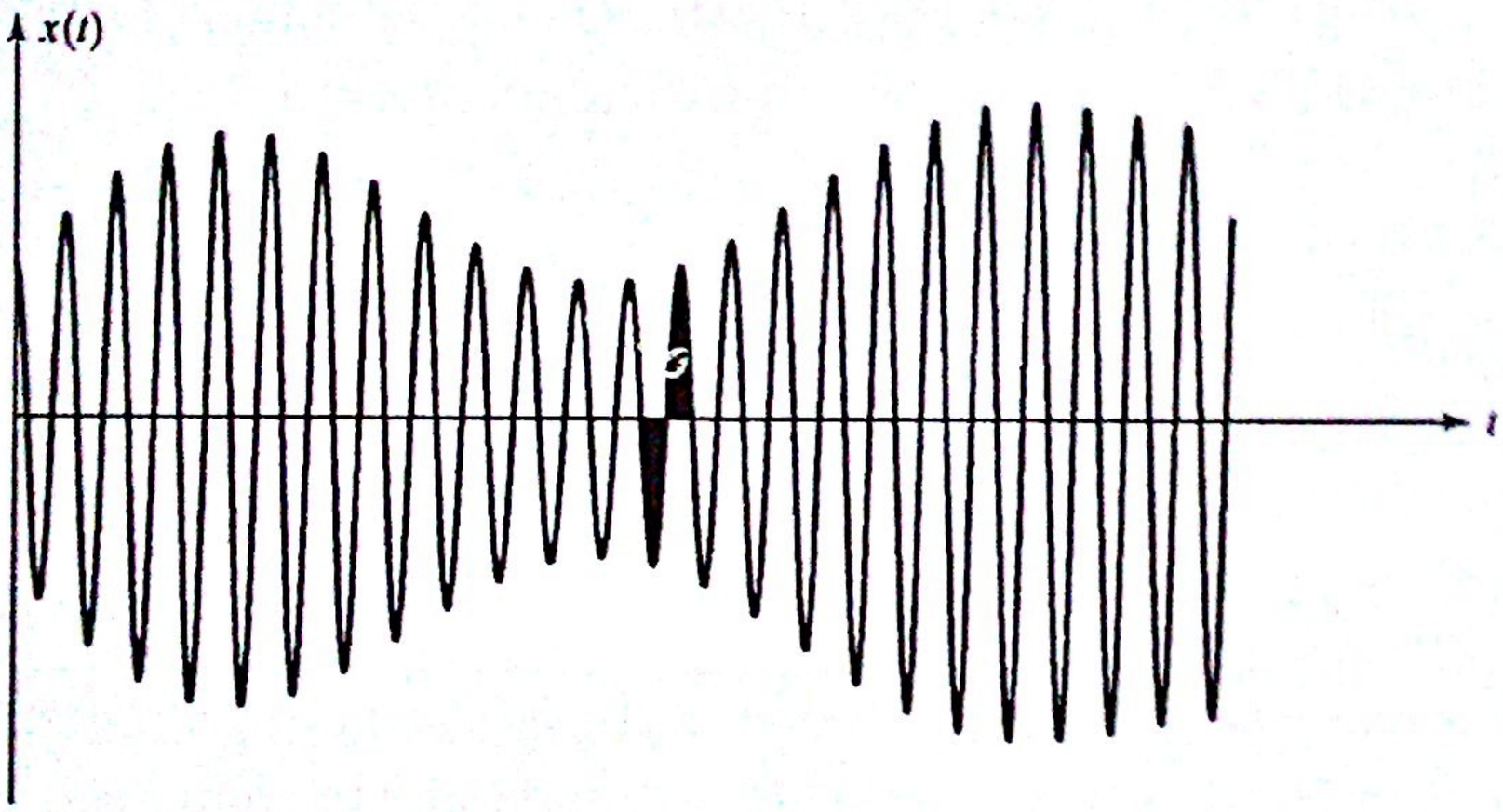
$$\begin{aligned} P_u &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)\,dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A_c^2 m^2(t)\cos^2(2\pi f_c t)\,dt \\ &= \frac{A_c^2}{2}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} m^2(t)[1+\cos(4\pi f_c t)]\,dt \qquad (3.2.1) \\ &= \frac{A_c^2}{2} P_m \qquad (3.2.2) \end{aligned}$$

olur. Burada P_m $m(t)$ mesaj işaretinin gücünü göstermektedir. En son adım (3.2.2 ifadesi), $m^2(t)$ ifadesinin yavaş değişen bir işaret olduğu ve yüksek frekanslı sinüzoidal işaret $\cos(4\pi f_c t)$ ile çarpıldığında sonucun, Şekil 3.5'de gösterildiği gibi, yavaş değişim gösteren bir zarfa sahip yüksek frekanslı bir sinüzoidal olması gerçeğinden hareket ile elde edilmiştir.

Zarf yavaş değişim gösterdiğinden, işaretin pozitif ve negatif yarıları her bir periyotta hemen hemen aynı genliğe sahiptir. Dolayısı ile entegrali alındığında bunlar birbirini yok eder.



Şekil 3.5 $m^2(t)\cos(4\pi f_c t)$ işaretinin çizimi



Şekil 3.6. Bu şekil denklem (3.2.1)'deki ikinci terimin neden sıfır olduğunu göstermektedir.

Dolayısı ile $m^2(t)\cos(4\pi f_c t)$ entegrali hemen hemen sıfırdır. Bu durum Şekil 3.6'da gösterilmiştir. Entegralin sonucu T'e bölündüğünden ve T oldukça büyük değerler aldığından (3.2.1) denklemindeki ikinci terim sıfır olur.

Örnek 3.2.3

Örnek 3.2.1'deki modülasyonlu işaretin ve her iki yanbandın gücünü hesaplayın.

Çözüm $m(t) = \alpha\cos 2\pi f_m t$ mesaj işaretidir. Bu işaretin gücü Örnek 2.1.10'da denklem (2.1.12) kullanılarak

$$P_m = \frac{a^2}{2}$$

şeklinde elde edilmiştir.

Dolayısı ile

$$P_u = \frac{A_c^2}{2} P_m = \frac{A_c^2 a^2}{4}$$

olur. Yanbandların simetrisinden dolayı alt ve üst yanband güçleri P_{us} ve P_{ls} birbirine eşit olacak ve

$$P_{us} = P_{ls} = \frac{A_c^2 a^2}{8}$$

şeklinde verilecektir. ■

ÇYB-TB GM İşaretin Demodülasyonu. ÇYB-TB GM işaretinin ideal (kanal bozulması ve gürültünün olmadığı) bir kanaldan iletildiğini varsayalım. Bu durumda alınan işaret modülasyonlu işarete eşit olacaktır. Yani

$$\begin{aligned} r(t) &= u(t) \\ &= A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

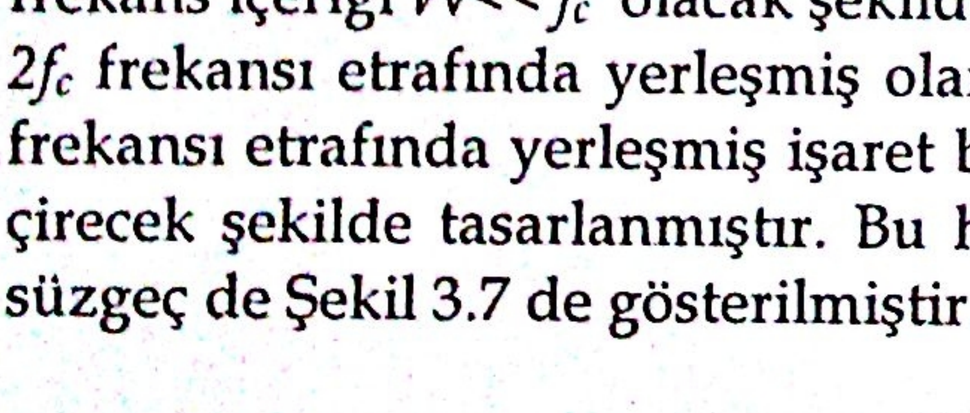
Alınan işaret *r(t)'in* öncelikle, lokal olarak üretilen $\cos(2\pi f_c t + \phi)$ şeklindeki bir sinüzoidal ile çarpılarak demodüle edildiğini varsayalım. Burada ϕ sinüzoidal işaretin faz büyüklüğüdür. Sonra, oluşan işareti, bandgenişliği *W* olan ideal alçak geçiren bir süzgeçten geçirdiğimizi varsayalım. *r(t)* ile $\cos(2\pi f_c t + \phi)$ çarpımı

$$\begin{aligned} r(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) &= A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} A_c m(t)\cos(\phi) + \frac{1}{2} A_c m(t)\cos(4\pi f_c t + \phi) \end{aligned}$$

sonucunu verir. Bu işaretin tayfı Şekil 3.7'de gösterilmiştir. Mesaj işareti *m(t)'in* frekans içeriği $W << f_c$ olacak şekilde *W* ile sınırlı olduğu için, alçak geçiren süzgeç, $2f_c$ frekansı etrafında yerleşmiş olan işaret bileşenlerini söndürecek ve sadece f=0 frekansı etrafında yerleşmiş işaret bileşenlerini herhangi bir bozulma olmadan geçirecek şekilde tasarlanmıştır. Bu hedefleri sağlayabilecek ideal bir alçak geçiren süzgeç de Şekil 3.7 de gösterilmiştir. Sonuç olarak, ideal süzgeç çıkışı

$$y_\ell(t) = \frac{1}{2} A_c m(t)\cos(\phi). \tag{3.2.4}$$

olur. Burada *m(t)* ifadesinin $\cos(\phi)$ ile çarpılmış olduğuna dikkat edin. Dolayısı ile demodüle edilmiş işaretin gücü $\cos^2\phi$ faktörü ile orantılı olarak azalacaktır. Bundan dolayı yeniden elde edilmesi istenen işaretin genliği lokal olarak üretilen sinüzoidal işaretin fazına ϕ bağlı olan bir etken tarafından ölçeklendirilecektir.



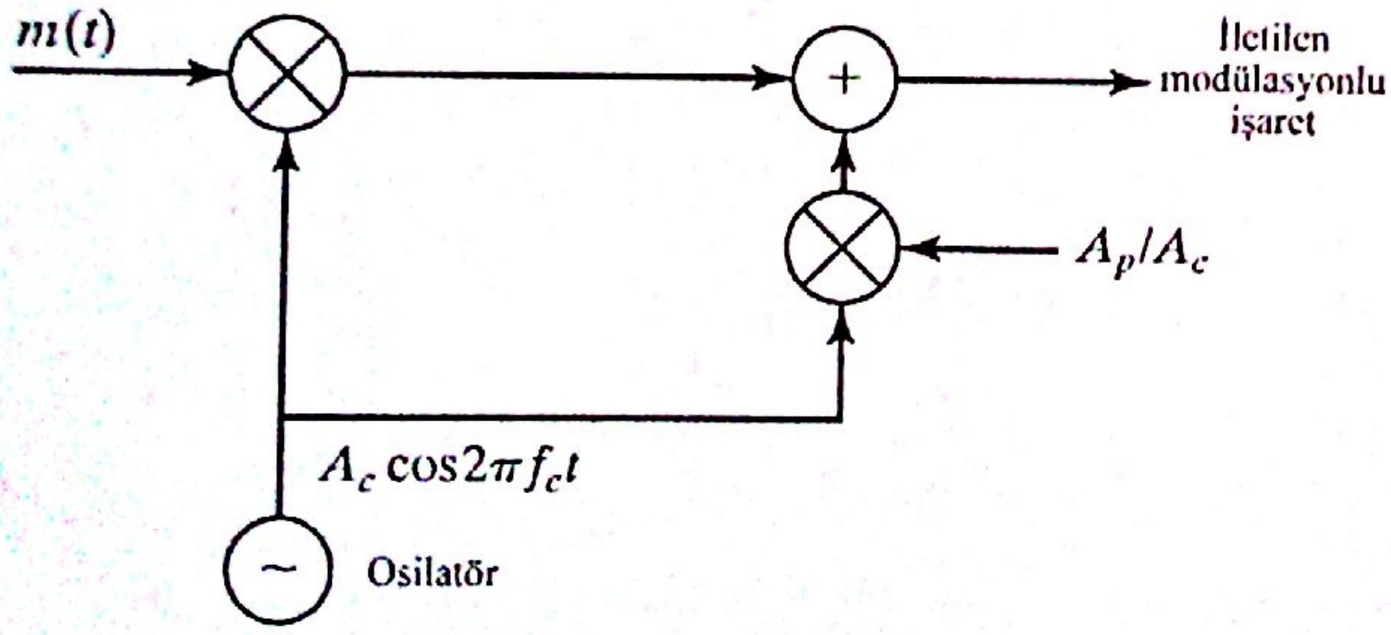
Şekil 3.7. ÇYB-TB GM demodülasyonunun frekans düzleminde gösterimi

$\phi \neq 0$ olduğu durumda yeniden elde edilen işaretin genliği $\cos(\phi)$ kadar zayıflatılacaktır. Eğer $\phi = 45^0$ ise bu durumda işaretin genliği $\sqrt{2}$ kadar zayıflayacak ve işaret gücü ise yarı yarıya azalacaktır. $\phi = 90^\circ$ olur ise işaret bileşeni tamamen yok olacaktır.

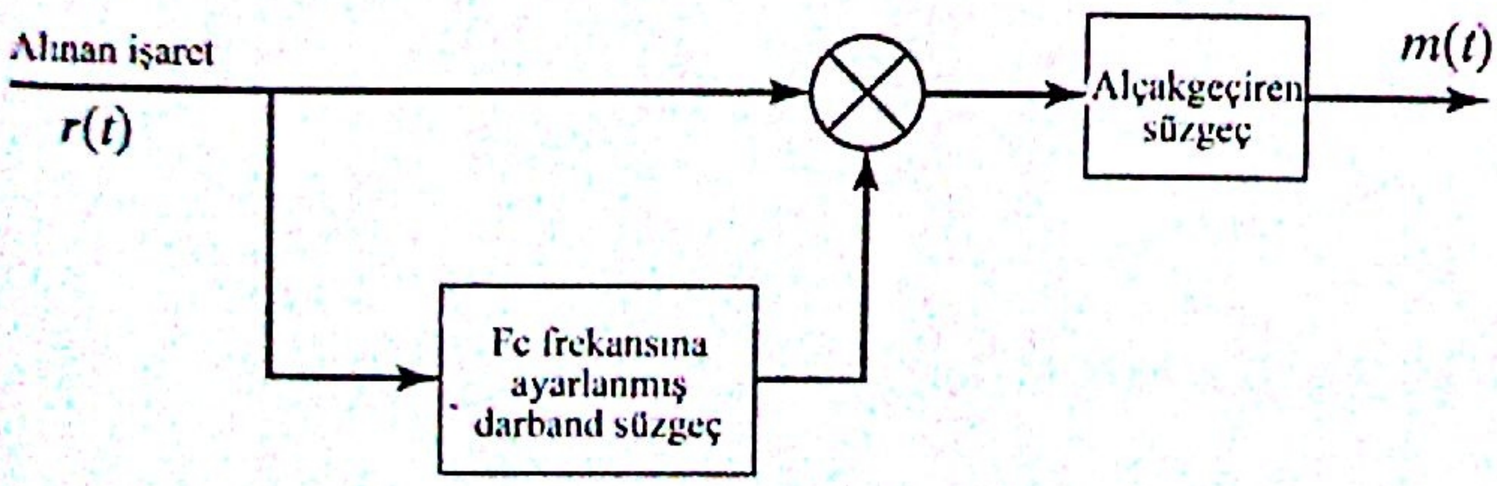
Yukarıdaki tartışma alınan işaretten $m(t)$ mesaj işaretini yeniden elde etmek için *faz uyumlu veya eşzamanlı (senkron) demodülatöre* olan ihtiyacı ortaya koymaktadır. Yani yerel olarak üretilen sinüzoidin fazı ϕ ideal durumda sıfır olmalıdır (yani alınan taşıyıcı işaretin fazına eşit olmalıdır).

Fazı, alınan işaretin fazına kilitlenmiş bir sinüzoid iki yöntemden biri kullanılarak üretilebilir. Yöntemlerden biri, Şekil 3.8'de gösterildiği gibi, taşıyıcı bileşeni iletilen işarete eklemek ile mümkündür. Bu tür bir taşıyıcı bileşen "pilot ton" olarak adlandırılır. Bu bileşenin genlik değeri A_p ve gücü $A_p^2/2$, modüle edilmiş işaretin genlik ve gücüne oranla oldukça küçük seçilir. Bundan dolayı iletilen işaret çift yanbanda sahip fakat ancak taşıyıcısı bastırılmış işaret değildir. Alıcıda f_c frekansına ayarlanmış darband bir süzgeç pilot işaret bileşenini ayırır. Bu süzgecin çıkışı Şekil 3.9'da gösterildiği gibi alınan işaret ile çarpılmak için kullanılır. Pilot işaretin varlığının demodülasyon sonucunda bir DC bileşene neden olduğunu göstereceğiz; bu DC bileşen $m(t)$ işaretini yeniden elde etmek için yok edilmelidir.

İletilen işarete bir pilot ton eklemenin dezavantajı vardır: Bu durum iletilen işarette belirli oranda bir gücün pilot bileşenin iletimi için harcanmasını gerektirir. Bir başka alternatif, bir pilot işarete ihtiyaç olmadan fazı gelen işaret fazına kilitlenmiş bir sinuzoidal işareti alınan işaret $r(t')$den üretmektir. Bu işlem altbölüm 6.4'de açıklandığı gibi *faz kilitlemeli döngü* kullanılarak gerçekleştirilebilir.



Şekil 3.8. ÇYB-TB işarete pilot tonun eklenmesi



Şekil 3.9. ÇYB-TB işareti demodüle etmek için pilot işaretin kullanımı

3.2.2 Geleneksel Genlik Modülasyonu

Geleneksel GM işaret çiftyanband GM modülasyonlu işarete ek olarak büyük taşıyıcı bileşene sahiptir. İletilen işaret matematiksel olarak

$$u(t) = A_c[1 + m(t)]\cos(2\pi f_c t) \tag{3.2.5}$$

şeklinde ifade edilir. Burada mesaj dalga formu $|m(t)| \le 1$ olma şartını yerine getirecek şekilde sınırlandırılmıştır. Dikkat edilir ise $A_0 m(t)\cos(2\pi f_c t)$ çift yanband GM işareti iken $A_c \cos(2\pi f_c t)$ taşıyıcı bileşendir. Şekil 3.10 zaman düzleminde bir GM işareti göstermektedir. Bu bölümün sonunda göreceğimiz gibi, fazlalık bir taşıyıcının varlığı çok basit demodülatör yapılarını mümkün kılmaktadır. GM yayıncılıkta genellikle bu tip modülasyon tercih edilmesinin nedeni budur.

$|m(t)| \le 1$ olduğu müddetçe $A_c[1+m(t)]$ genliği her zaman pozitif olacaktır. Bu daha sonra açıklanacağı gibi demodülasyonu kolaylaştırmak için geleneksel ÇYB GM için istenilen bir şarttır. Diğer taraftan bazen eğer $m(t) < -1$ olur ise GM işareti aşırı *modülasyonludur*. Ve demodülasyon çok karmaşık bir işlem haline gelir. Uygulamada $m(t)$ işaret genliği daima birden küçük olacak şekilde ölçeklendirilir.

Bazen $m(t)$'i

$$m(t) = am_n(t)$$

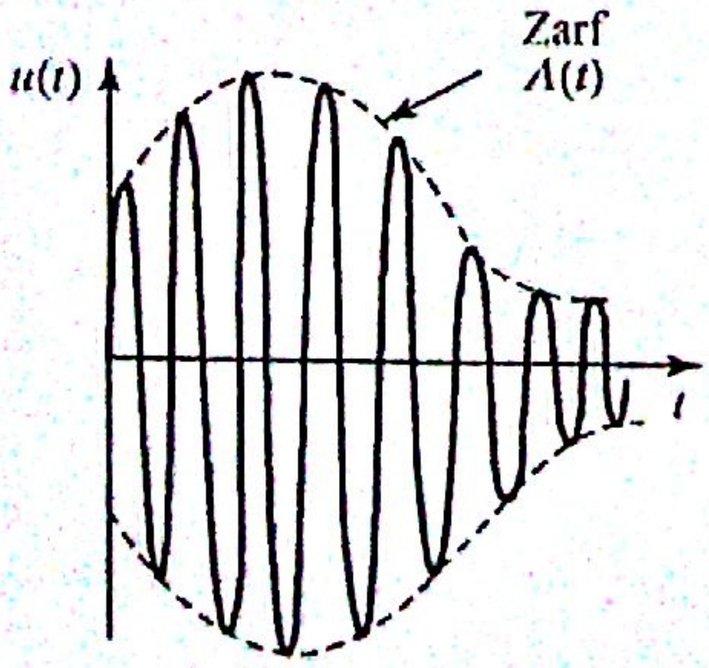
şeklinde ifade etmek daha uygun olur. Burada $m_n(t)$ minimum değeri -1 olacak şekilde normalize edilmiştir. Bu işlem örneğin

$$m_n(t) = \frac{m(t)}{\max|m(t)|}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda, genellikle 1'den daha küçük sabit bir değer olan, ölçekleme faktörü α *modülasyon indeksi* olarak adlandırılır. $|m_n(t)| \le 1$ ve $0 < \alpha < 1$ olduğu için, $1 + \alpha m_n(t) > 0$ elde edilir ve modülasyonlu işaret hiçbir zaman aşırı modülasyon göstermeyecek olan

$$u(t) = A_c[1 + am_n(t)]\cos 2\pi f_c t \tag{3.2.6}$$

formunda ifade edilebilir.



Şekil 3.10. Zaman düzlemi geleneksel GM işareti

Geleneksel GM İşaretin Tayfı. Eğer $m(t)$ Fourier dönüşümü $M(f)$ olan bir mesaj işareti ise $u(t)$ genlik-modülasyonlu işaretin tayfı

$$\begin{aligned} U(f) &= \mathcal{F}[A_c a m_n(t)\cos(2\pi f_c t)] + \mathcal{F}[A_c \cos(2\pi f_c t)] \\ &= \frac{A_c a}{2}[M_n(f - f_c) + M_n(f + f_c)] + \frac{A_c}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \end{aligned}$$

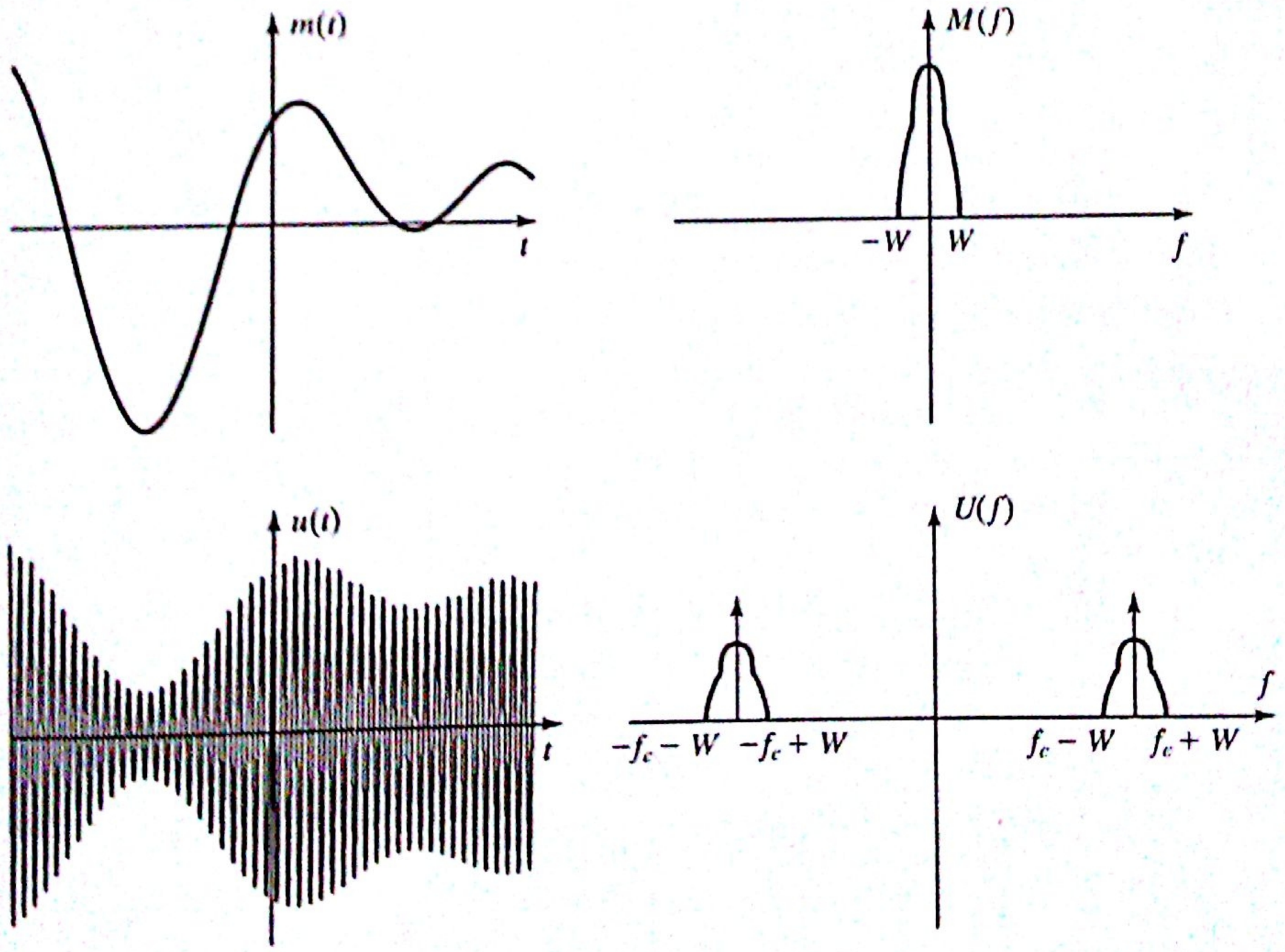
olur. Bir mesaj işareti $m(t)$ ve bu işaretin tayfı $M(f)$, ilgili modülasyonlu işaret $u(t)$ ve bunun tayfı $U(f)$ Şekil 3.11'de gösterilmiştir. Açıkça görülebileceği gibi, geleneksel GM işaret tayfı mesaj işaretinin bandgenişliğinin iki katı bir band işgal eder.

Örnek 3.2.4

Modüle edici işaret $m(t)$

$$m(t) = \cos 2\pi f_m t \quad f_m \ll f_c$$

formunda bir sinüzoidal işaret olduğunu varsayalım. ÇYB-GM işareti, alt ve üst yanbandlarını ve tayfını belirleyin. Modülasyon indeksinin α olduğunu varsayın.



Şekil 3.11. Zaman ve Frekans düzleminde geleneksel GM

Çözüm Denklem (3.2.6) dan, ÇYB-GM işaret

$$u(t) = A_c[1 + a\cos 2\pi f_m t]\cos(2\pi f_c t)$$

$$= A_c\cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c - f_m)t]$$

$$+ \frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c + f_m)t]$$

şeklinde ifade edilebilir. Alt yanband bileşeni

$$u_\ell(t) = \frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c - f_m)t]$$

İken, üst yanband bileşeni

$$u_u(t) = \frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c + f_m)t]$$

olur. ÇYB-GM işaret $u(t)$'in tayfı

$$U(f) = \frac{A_c}{2}\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right]$$

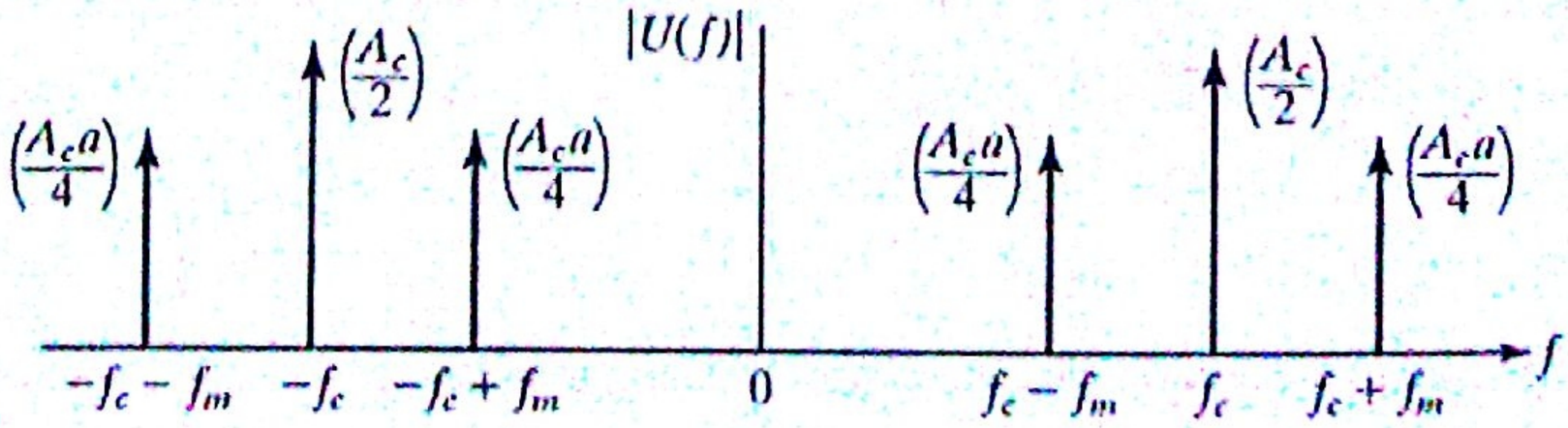
$$+ \frac{A_c a}{4}\left[\delta(f - f_c + f_m) + \delta(f + f_c - f_m)\right]$$

$$+ \frac{A_c a}{4}\left[\delta(f - f_c - f_m) + \delta(f + f_c + f_m)\right]$$

olur. Genlik tayfı $|U(f)|$ Şekil 3.12'de gösterilmiştir. $\alpha < 1$ olduğundan taşıyıcı bileşen gücünün, $A_c^2/2$, her iki yanbandın $(A_c^2 a^2/4)$ olan toplam gücünden daha büyük olması dikkat çekicidir.

Geleneksel GM İşaretin Gücü. Geleneksel GM işaret, $m(t)$ yerine $1+m_n(t)$ yerleştirildiğinde ÇYB işarete benzer. ÇYB-TB durumunda gördüğümüz gibi, modülasyonlu işaretin gücü (Denklem 3.2.2'e bakınız)

$$P_u = \frac{A_c^2}{2}P_m$$



Şekil 3.12. Örnek 3.2.4 de verilen ÇYB-GM işaretin tayfı

olur. Burada P_m mesaj işaretinin gücünü temsil eder. Geleneksel GM için

$$P_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [1 + a m_n(t)]^2 \, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [1 + a^2 m_n^2(t)] \, dt$$

olur. Burada $m_n(t)$ ortalamasının sıfır olduğu kabulü yapılmıştır. Bu kabul ses işaretleri de dahil birçok işaret için geçerlidir. Dolayısı ile geleneksel GM işaret için

$$P_m = 1 + a^2 P_{m_n}$$

ve dolayısı ile

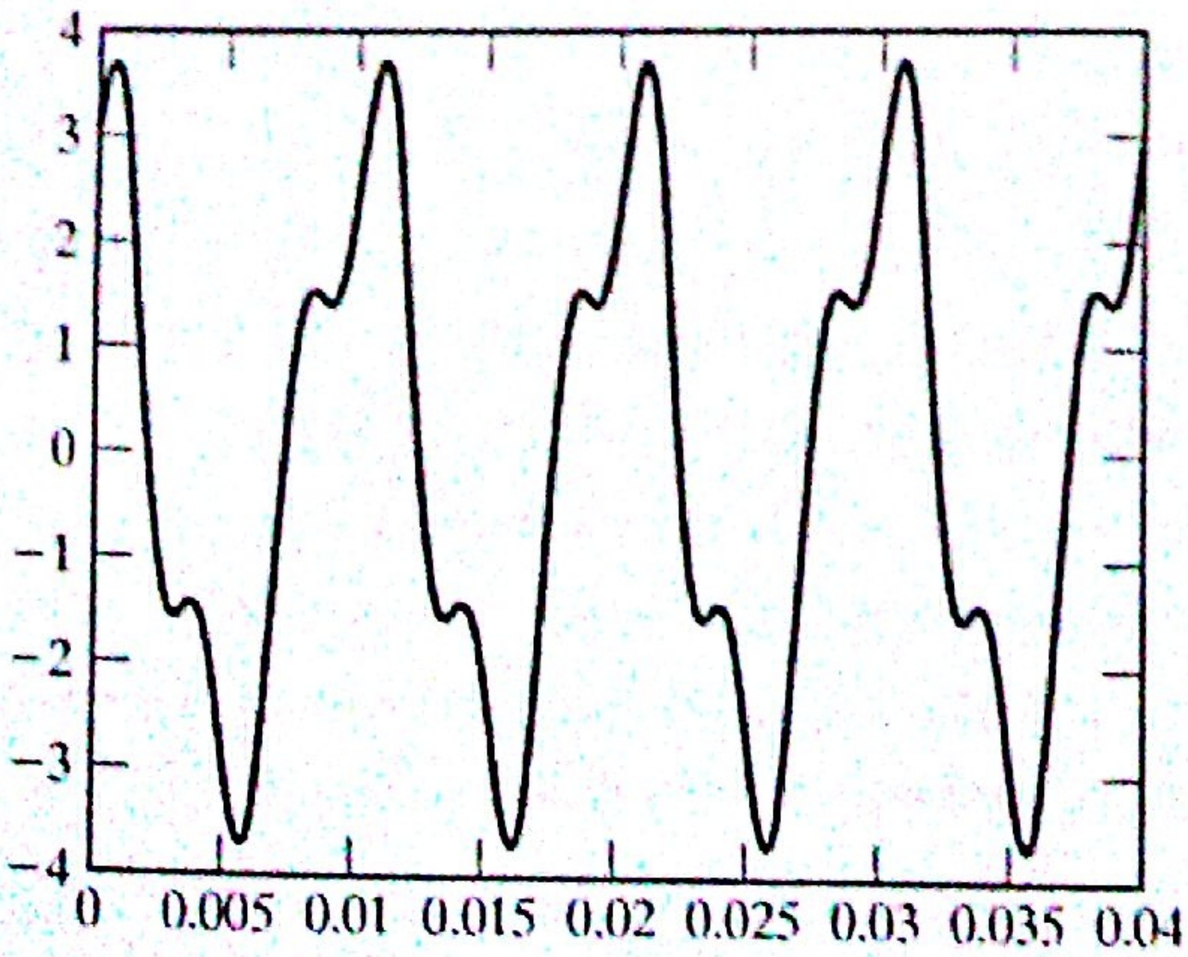
$$P_s = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2}{2} a^2 P_{m_n}$$

olarak verilir. Yukarıdaki ifadede ilk terim taşıyıcının mevcut olması durumunda geçerlidir ve bu bileşen herhangi bir bilgi taşımaz. İkinci bileşen bilgi taşıyan bileşendir. İkinci bileşenin genellikle birinci bileşenden ($a < 1, |m_n(t)| < 1$ ve dinamik değişimi büyük olan işaretler için $P_{m_n} << 1$ olacağından) çok daha küçük olduğuna dikkat edin. Bu durum geleneksel GM sistemlerin ÇYB-TB sistemlere nazaran çok daha az güç verimliliğine sahip olduğunu gösterir. Geleneksel GM'un üstünlüğü ise demodülasyon işleminin kolay olmasıdır.

Örnek 3.2.5

$m(t) = 3\cos(200\pi t) + \sin(600\pi t)$ işareti $c(t) = \cos(2 \times 10^3 t)$ taşıyıcı işaretini modüle etmek için kullanılmaktadır. Modülasyon indeksi $a = 0.85$ 'tir. Modülasyonlu işaretin taşıyıcı bileşeninde ve yanband bileşenlerindeki gücü belirleyin.

Çözüm Mesaj işareti Şekil 3.13'de gösterilmiştir. İlk olarak, normalize edilmiş işaret $m_n(t)$ belirlensin. $m_n(t)$'in bulunabilmesi için $\max|m(t)|$ belirlenmelidir.



Şekil 3.13. Örnek 3.2.5'de verilen mesaj işareti

$m(t)$'in maksimum noktalarını belirlemek için, işaretin türevi alınır ve sıfıra eşitlenir. Bu durumda

$$m'(t) = -600\pi \sin(200\pi t) + 600\pi \cos(600\pi t)$$
$$= 0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\cos(600\pi t) = \sin(200\pi t)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 200\pi t\right)$$

bulunur. Bu denklemin çözümlerinden biri $800\pi t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{1}{1600}$ veya $t = \frac{1}{1600}$. Bu değer $m(t)$ ifadesinde yerine konur ise

$$m\left(\frac{1}{1600}\right) = 3.6955$$

elde edilir ki bu $m(t)$ işaretinin maksimum değeridir. Dolayısı ile

$$m_n(t) = \frac{3\cos(200\pi t) + \sin(600\pi t)}{3.6955}$$
$$= 0.8118\cos(200\pi t) + 0.2706\sin(600\pi t)$$

olur. Farklı frekanstaki iki sinüzoidal işaretin toplamının gücü bu işaretlerin güçlerinin toplamına eşittir. Dolayısı ile

$$P_{m_n} = \frac{1}{2}[0.8118^2 + 0.2706^2]$$
$$= 0.3661$$

olur. Modülasyonlu işaretin taşıyıcı bileşenindeki güç

$$\frac{A_c^2}{2} = 0.5$$

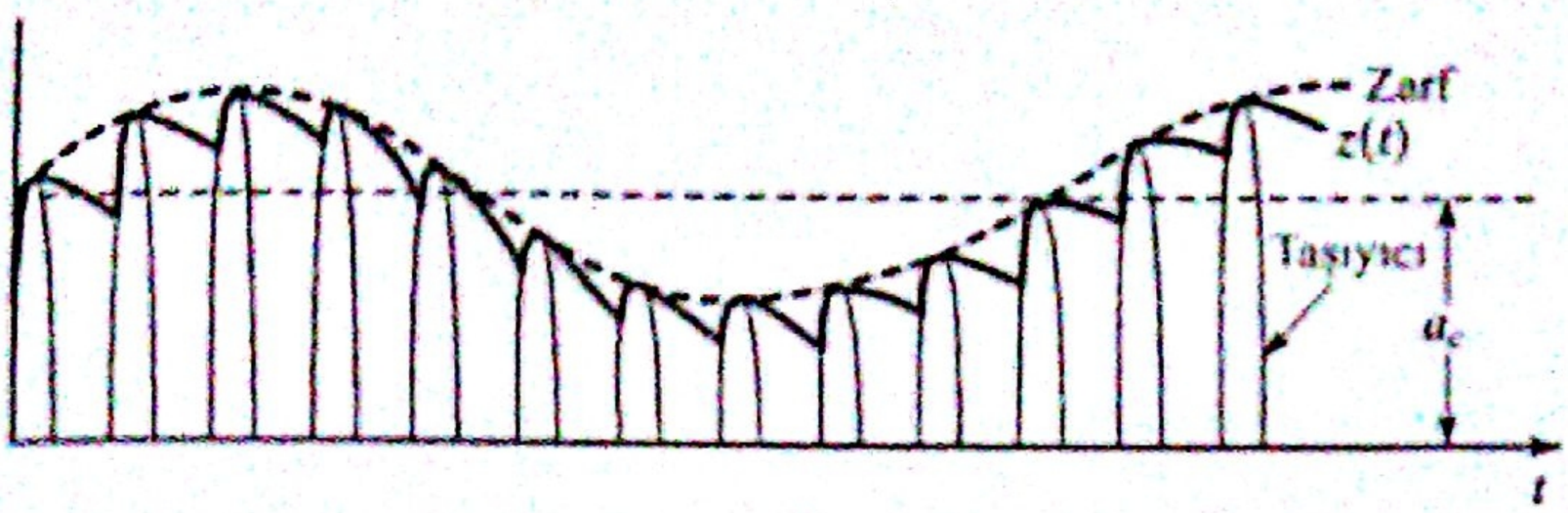
ve yanbandlardaki güç

$$\frac{A_c^2}{2} a^2 P_{m_n} = \frac{1}{2} \times 0.85^2 \times 0.3661$$
$$= 0.1323$$

olarak bulunur. ■

Geleneksel ÇYB-TB GM İşaretlerin Demodülasyonu. Geleneksel GM işaretlerin en büyük avantajı bu işaretlerin demodülasyonunun kolaylığıdır. Eşzamanlı (senkron) demodülatöre gereksinim duyulmaz. $|m(t)| < 1$ şartı $m(t)$ işareti tarafından sağlandığından, zarf (genlik) $1 + m(t) > 0$ olur. Eğer işareti bir doğrultucudan geçirerek doğrultur isek, Şekil 3.14'de gösterildiği gibi, mesaj işaretini bozmadan negatif değerlerden kurtulmuş oluruz.

Doğrultulmuş işaret $u(t) > 0$ iken $u(t)$ işaretine eşit olacak ve $u(t) < 0$ olduğunda ise sıfır olacaktır. Doğrultulmuş işaret bandgenişliği mesaj işaretinin bandgenişliğine uygun bir alçak geçiren süzgeçten geçirildiğinde mesaj işareti yeniden



Şekil 3.14 Geleneksel GM işaretinin zarf detektörü

elde edilir. Doğrultucu ve alçak geçiren süzgecin bu kombinasyonu *zarf detektörü* olarak isimlendirilir.

İdeal durumda, zarf detektörünün çıkışı

$$d(t) = g_1 + g_2 m(t) \tag{3.2.7}$$

formunda olur. Burada g_1 bir DC bileşeni ve g_2 işaretin demodülasyonundan dolayı oluşan bir kazanç faktörünü temsil eder. DC bileşen, çıkışı $g_2m(t)$ olan bir trafodan $d(t)$ geçirilerek yok edilebilir.

Demodülatorünün basitliği geleneksel ÇYB-GM'i GM radyo yayıncılığı için pratik seçim yapmıştır. Gerçektende milyonlarca radyo alıcısı mevcut olduğundan, demodülatorün pahalı olmaması oldukça önemlidir. Geleneksel GM'in güç verimsizliği, yayın yapan vericilerin sayısının alıcı sayısına oranla az olması gerçeğinden hareketle gerekçelendirilebilir. Sonuç olarak, güç verimliliğinden fedakarlık yaparak alıcı tarafta işaret demodülatörlerini basitleştirmek ve güçlü vericiler inşa etmek maliyet açışından daha uygundur.

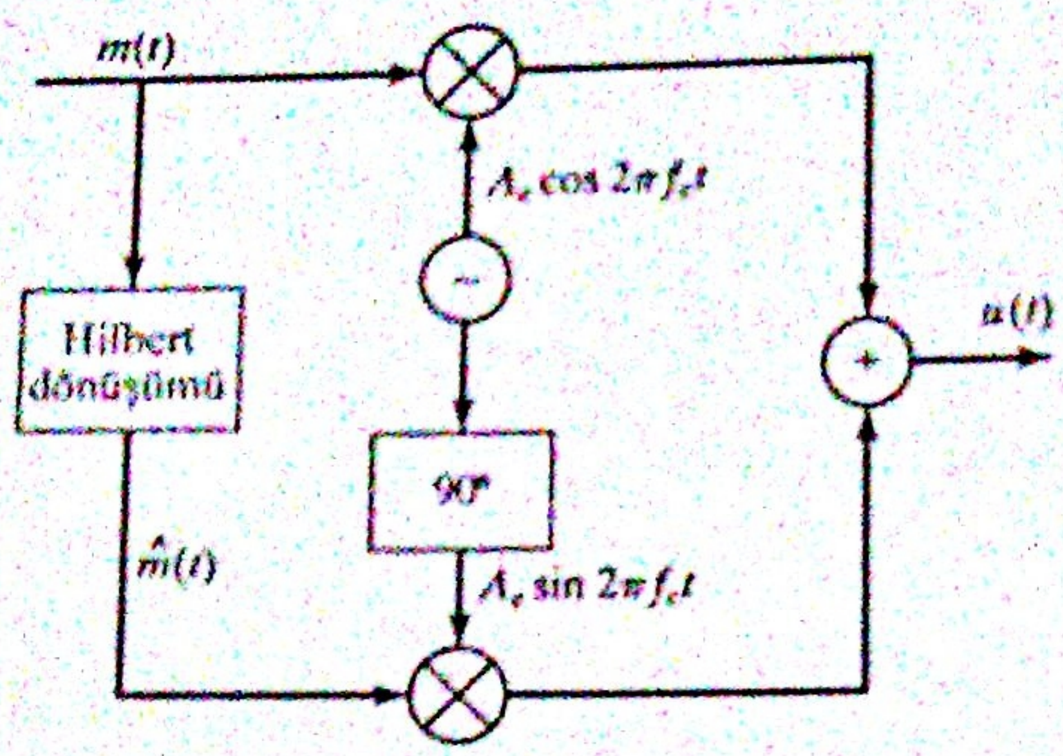
3.2.3 Tek Yanband GM

Altbölüm 3.2.1'de ÇYB-TB GM işaretinin, eğer mesaj işaretinin bandgenişliği W ise, $B = 2W$ Hz büyüklüğünde bir kanal band genlişiğine gereksinim duyacağını gösterdik. Ancak, çift yanbandlar fazlalık oluşturur. yanbandlardan sadece birinin iletiminin alıcıda $m(t)$ mesaj işaretinin yeniden oluşturulabilmesi için yeterli olduğunu göstereceğiz. Dolayısı ile iletilen işaretin bandgenişliğini temelband mesaj işareti $m(t)$'in bandgenişliğine düşüreceğiz.

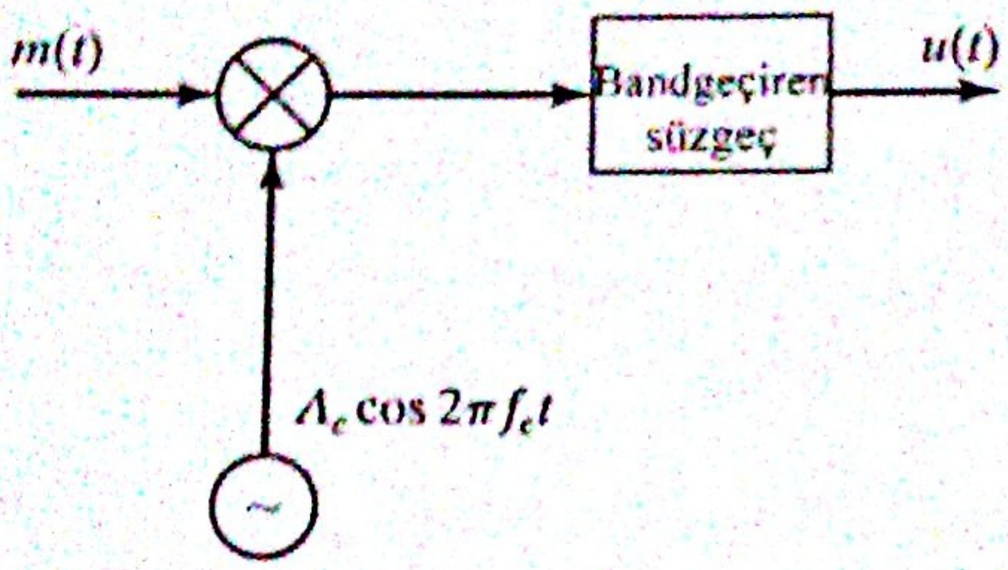
Bu bölümün sonundaki ekte, tek yanband (TYB: Single Side Band-SSB) GM işaretinin matematiksel olarak

$$u(t) = A_c m(t)\cos 2\pi f_c t \mp A_c \hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t \tag{3.2.8}$$

ifade edilebileceğini göstereceğiz. Burada $\hat{m}(t)$, $m(t)$ işaretinin, Altbölüm 2.6 da verilen Hilbert dönüşümüdür, artı ve eksi işaretleri ise hangi yanbandın elde edileceğini belirler. Artı işareti altyanbandı, ve eksi işareti ise üst yanbandı işaret eder. Hilbert dönüşümünün, dürtü tepkisi $h(t) = 1/\pi t$ ve frekans tepkisi



Şekil 3.15. Alt tek yanband GM işaret üretimi



Şekil 3.16. Tek yanband GM işaretin ÇYB-TB GM işaretin bandlarından birisinin bastırılması ile üretimi

$$H(f) = \begin{cases} -j, & f > 0 \\ j, & f < 0 \\ 0, & f = 0 \end{cases} \tag{3.2.9}$$

olan bir doğrusal süzgeç olarak görülebileceğini anımsayın. Dolayısı ile TYB-GM işareti $u(t)$ Şekil 3.15'de gösterilen sistem konfigurasyonu kullanılarak üretilebilir.

Şekil 3.15'de gösterilen yöntem, Hilbert dönüşüm süzgecini kullanmaktadır. Şekil 3.16'da gösterilen bir başka yöntem ise ilk olarak ÇYB-TB GM işaret üretir ve sonra çift yanband GM işaretin alt veya üst yanbandlarından birini seçecek bir süzgeç kullanır.

Örnek 3.2.6.

Modüle edici işaretin

$$m(t) = \cos 2\pi f_m t, \quad f_m \ll f_c$$

formunda bir sinuzoidal olduğunu varsayalım. Her iki olası TYB-GM işareti belirleyin.

Çözüm $m(t)$'*in* Hilbert dönüşümü

$$\hat{m}(t) = \sin 2\pi f_m t \tag{3.2.10}$$

Dolayısı ile

$$u(t) = A_c \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_c t \mp A_c \sin 2\pi f_m t \sin 2\pi f_c t \tag{3.2.11}$$

olur. Eğer (-) negatif işareti alınır ise, üst tek yanband (UTYB) işaret üretilir.

$$u_u(t) = A_c \cos 2\pi (f_c + f_m)t$$

Diğer yandan eğer denklem (3.2.11)'deki (+) pozitif işareti alınır ise alt tek yanband (ATYB) işaret üretilir

$$u_l(t) = A_c \cos 2\pi (f_c - f_m)t$$

$u_u(t)$ ve $u_l(t)$ işaretlerinin tayfı daha önce Şekil 3.3'de verilmişti. ■

TYB-GM İşaretlerin Demodülasyonu. Alman TYB-GM işaretinden tekrar mesaj işareti $m(t)$'in üretilmesi için, ÇYB-TB GM işaretlerinin demodülasyonunda olduğu gibi, bir faz uyumlu veya eşzamanlı demodülatöre ihtiyaç vardır. Dolayısı ile Denklem (3A.7) de verilen UTYB işaret için

$$\begin{aligned} r(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) &= u(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}A_c m(t)\cos\phi + \frac{1}{2}A_c \hat{m}(t)\sin\phi \\ &\quad + \text{iki kat frekanslı terimler} \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

olur. Denklem (3.2.12)'de elde edilen işareti ideal alçak geçiren bir süzgeçten geçirdiğimizde iki kat frekanstaki bileşenler yok edilecektir. Sonuç olarak

$$y_d(t) = \frac{1}{2}A_c m(t)\cos\phi + \frac{1}{2}A_c \hat{m}(t)\sin\phi \tag{3.2.13}$$

elde edilir. Burada faz farklılığının sadece elde edilmek istenen $m(t)$ işaretini $\cos\phi$ faktörü ile zayıflatmadığını, aynı zamanda $y_d(t)$ ifadesinde $\hat{m}(t)$ teriminin varlığından dolayı arzu edilmeyen bir yanband işareti oluşturduğuna dikkat edin. Bu ikinci bileşen ÇYB-TB işaretin demodülasyonunda ortaya çıkmamıştı. Ancak bu TYB işaretin demodülasyonunun bozulmasında etki eden bir faktördür.

Alıcıda eşzamanlı demodulasyon gerçekleştirmek için gerekli olan faz uyumlu bir referans işaretin elde edilebilmesinde, taşıyıcı frekansında bir pilot işaretin iletimi oldukça etkili bir metottur. Böylelikle arzu edilmeyen yanband işaret bileşeni tamamen yok edilebilir. Ancak bu yöntem iletilen gücün bir kısmının, taşıyıcının iletimi için harcanması anlamına gelecektir.

TYB GM yönteminin spektral verimliliği bu modulasyon yönteminin telefon kanaları üzerinden ses iletişiminde (kablolu veya kablosuz) oldukça cazip yapmaktadır. Bu uygulamada bir pilot eşzamanlı demodülasyon için iletilir ve birçok kanal arasında paylaşılır.

İşaretin iki yanbandından birini iletim için seçen ve Şekil 3.16'da gösterilen süzgeçleme yöntemi, özellikle mesaj işareti f=0 etrafında yoğunlaşmış büyük güce sahip ise, uygulama açışından oldukça zordur. Böyle bir durumda, yanband süzgecinin taşıyıcı frekansı çevresinde, ikinci yanbandı yok etmek için oldukça keskin bir geçiş yapması gerekir. Böyle bir süzgeç karakteristiğinin sağlanması patrikte oldukça zordur.

3.2.4 Artık Yanband GM

TYB GM sistemlerde yanband süzgecinin taşıması gereken oldukça katı frekans tepki şartı bir *artıklık* sağlanması ile yumuşatılabilir. Artıklık, istenmeyen yandbandın bir kısmının modülatör çıkışında gözükmesi anlamına gelmektedir. Böylece işareti iletmek için gerekli bandgenişliğinin hafifçe artırılması gibi bir maliyete ile yanband süzgeç tasarımı basitleştirmiş oluruz. Sonuçta elde edilen işaret *artık yanband (AYB)* GM olarak isimlendirilir. Bu tip modülasyon video işaretleri gibi oldukça düşük alçak frekans bileşenleri olan işaretler için uygundur. Bu modülasyon tipinin standart TV yayıncılığında kullanılmasının nedeni budur.

AYB-GM işareti üretmek için ilk olarak ÇYB-GM işaret üretilir ve daha sonra bu işaret frekans tepkisi $H(f)$ olan ve şekil 3.17'de gösterilen bir yanband süzgeçten geçirilir. Zaman düzleminde AYB işaret

$$u(t) = [A_c m(t) \cos 2\pi f_c t] \star h(t) \tag{3.2.14}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $h(t)$ AYB süzgecin dürtü tepkisidir. Frekans düzleminde ise ilgili ifade

$$U(f) = \frac{A_c}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)]H(f) \tag{3.2.15}$$

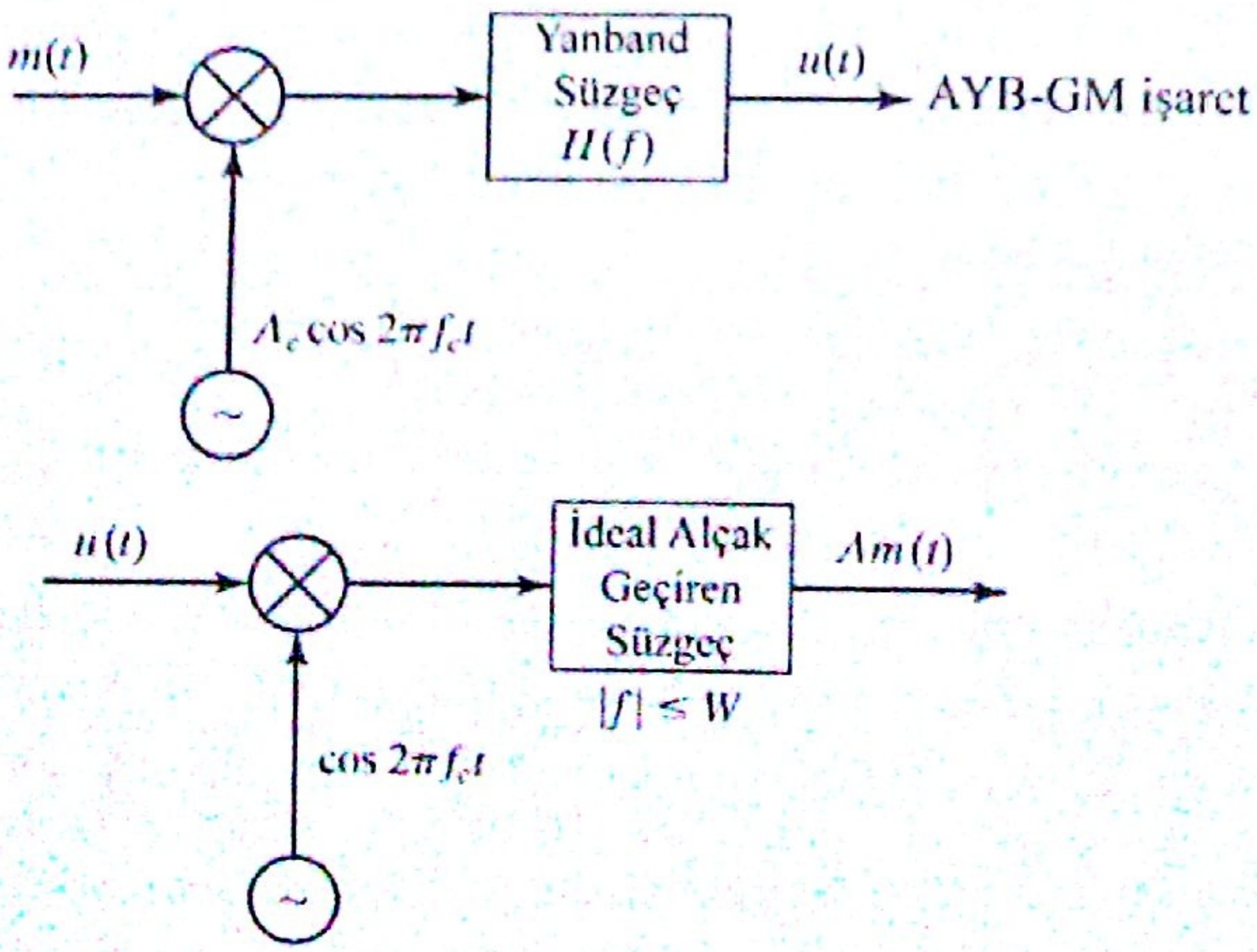
şeklinde olacaktır. Süzgecin frekans-tepki karakteristiğini belirlemek için, AYB işareti $u(t)$'in demodülasyonunu inceleyelim. $u(t)$ taşıyıcı bileşen $\cos 2\pi f_c t$ ile çarpılıp, Şekil 3.18'de gösterilen ideal bir alçak geçiren süzgeçten geçirilir. Dolayısı ile sonuçta

$$v(t) = u(t) \cos 2\pi f_c t$$

veya buna denk olan

$$V(f) = \frac{1}{2}[U(f - f_c) + U(f + f_c)] \tag{3.2.16}$$

elde edilir.



Şekil 3.17. Artık-yanband GM işaret üretimi

Şekil 3.18 AYB işaretinin demodülasyonu

Denklem (3.2.15) deki $U(f)$ ifadesini denklem (3.2.16) yerine koyarsak,

$$V(f) = \frac{A_c}{4}[M(f - 2f_c) + M(f)]H(f - f_c)$$
$$+ \frac{A_c}{4}[M(f) + M(f + 2f_c)]H(f + f_c) \qquad (3.2.17)$$

sonucu elde edilir. Alçak geçiren süzgeç iki kat frekanstaki terimleri geçirmeyecek ve sadece $|f| \leq W$ frekans bandındaki bileşenleri iletecektir. Bundan dolayı, ideal alçak geçiren süzgeç çıkışındaki işaretin tayfı

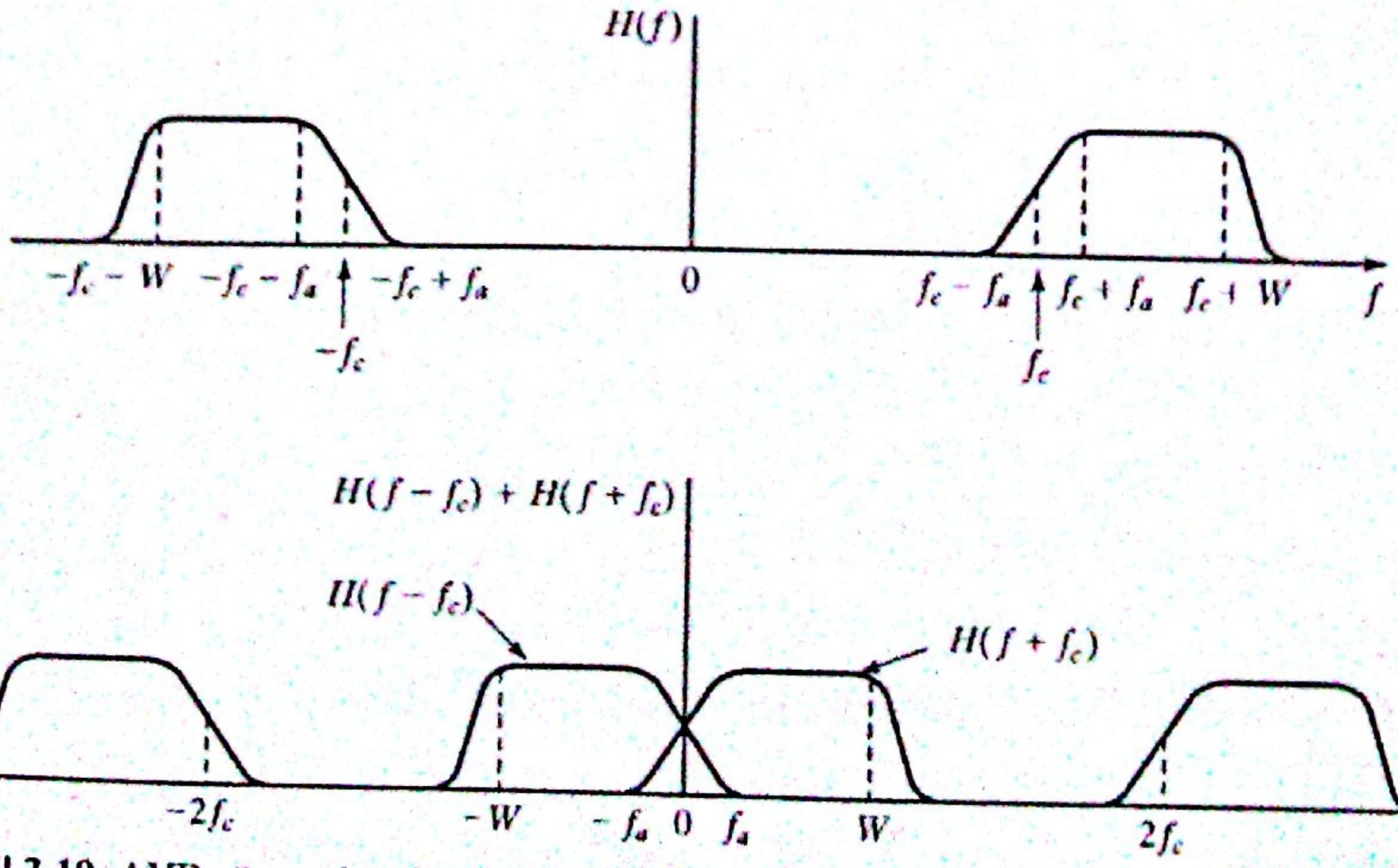
$$V_t(f) = \frac{A_c}{4}M(f)[H(f - f_c) + H(f + f_c)] \qquad (3.2.18)$$

olur. Alçak geçiren süzgeç çıkışındaki mesaj işaretinin bozulmamış olması gerekir. Dolayısı ile AYB süzgeç karakteristiği aşağıdaki koşulu sağlamalıdır.

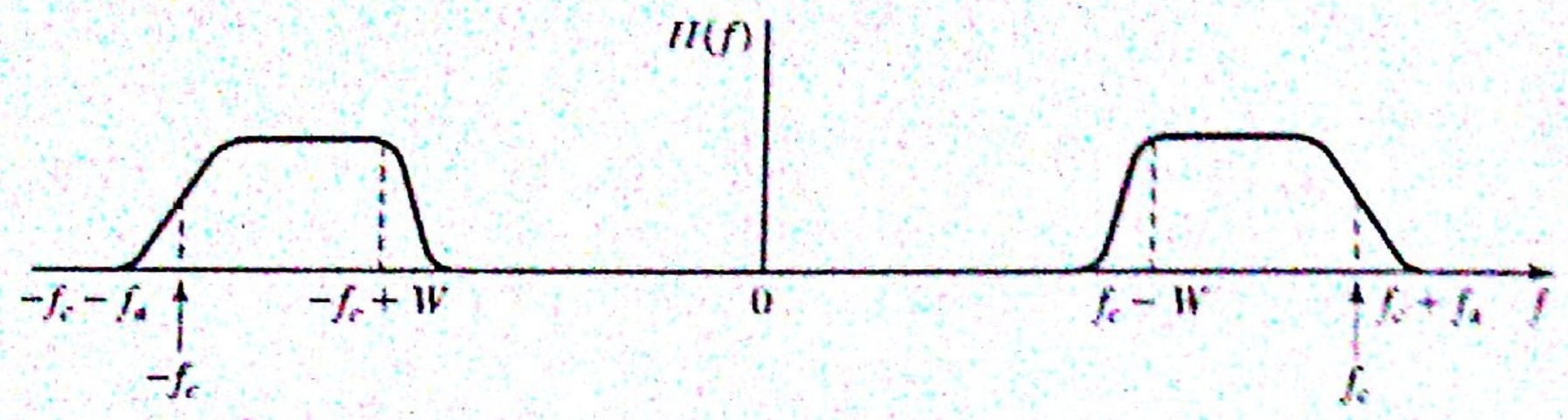
$$H(f - f_c) + H(f + f_c) = \text{sabit} \quad |f| \leq W \qquad (3.2.19)$$

Bu tür bir koşul Şekil 3.19'da verilen frekans tepki karakteristiğine sahip süzgeç tarafından sağlanır.

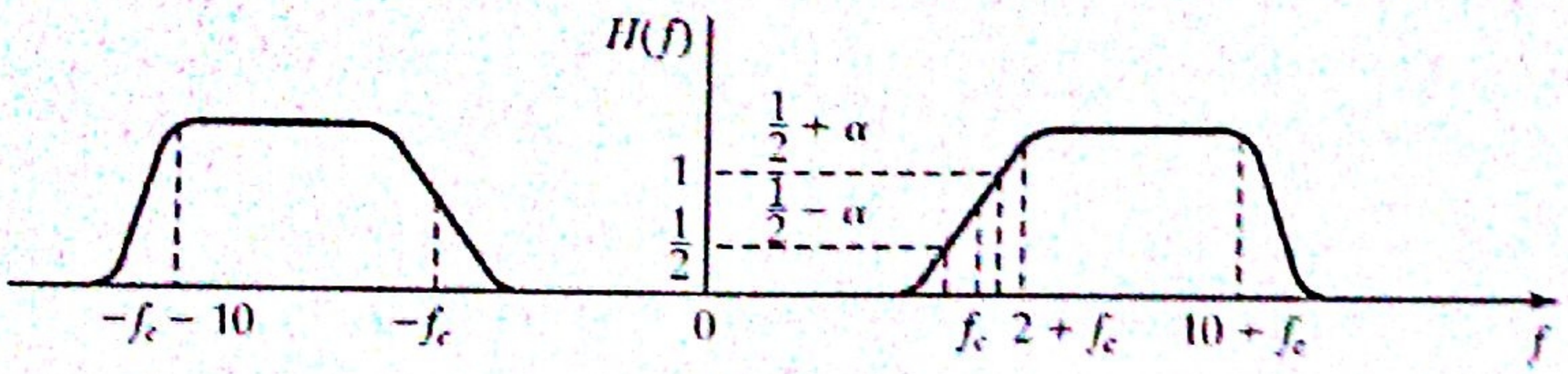
$H(f)$'in üstyanbandı ve altyanbandın bir kısmını seçtiğine dikkat edin. $f_c - f_a < f < f_c + f_a$ frekans aralığında f_c taşıyıcı frekansına göre tek simetriye sahiptir. Burada fa, W büyüklüğünün küçük bir oranı yani $f_a << W$ olacak şekilde seçilmiş bir frekanstır. Böylece iletilmiş işaretin bozulmamış bir versiyonunu elde etmiş oluruz. Şekil 3.20 altyanbandı ve üstyanbandın bir kısmını seçen bir AYB süzgecin frekans tepkisini göstermektedir.



Şekil 3.19. AYB süzgeç karakteristiği



Şekil 3.20 Mesaj işaretinin altyanbandını seçen AYB süzgeç için frekans tepkisi



Şekil 3.21 Örnek 3.2.7'de verilen AYB süzgecin frekans tepki karakteristiği

Uygulamada, AYB süzgeç belirli bir faz karakteristiği olacak şekilde tasarlanır. Mesaj işaretinin bozulmasını önlemek için, AYB süzgeç $f_c - f_a \le |f| \le f_c + W$ olarak ifade edilen geçirme bandında doğrusal faza sahip olmalıdır.

Örnek 3.2.7

Mesaj işaretinin

$$m(t) = 10 + 4\cos 2\pi t + 8\cos 4\pi t + 10\cos 20\pi t$$

olduğunu varsayalım. Üst yanbandı geçiren AYB süzgecin frekans tepki karakteristiğini ve alt yanbandın ilk frekans bileşenini belirleyin.

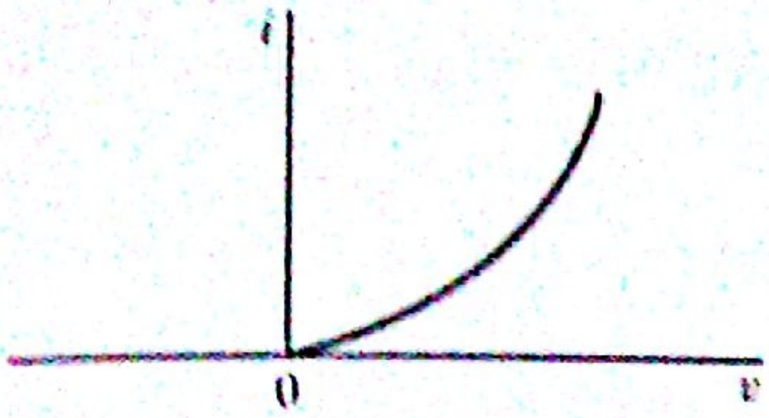
Çözüm ÇYB-TB GM işaret $u(t) = m(t)\cos 2\pi f_c t$'in tayfı

$$U(f) = 5[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + 2[\delta(f - f_c - 1) + \delta(f + f_c + 1)]$$
$$+ 4[\delta(f - f_c - 2) + \delta(f + f_c + 2)] + 5[\delta(f - f_c - 10) + \delta(f + f_c + 10)]$$

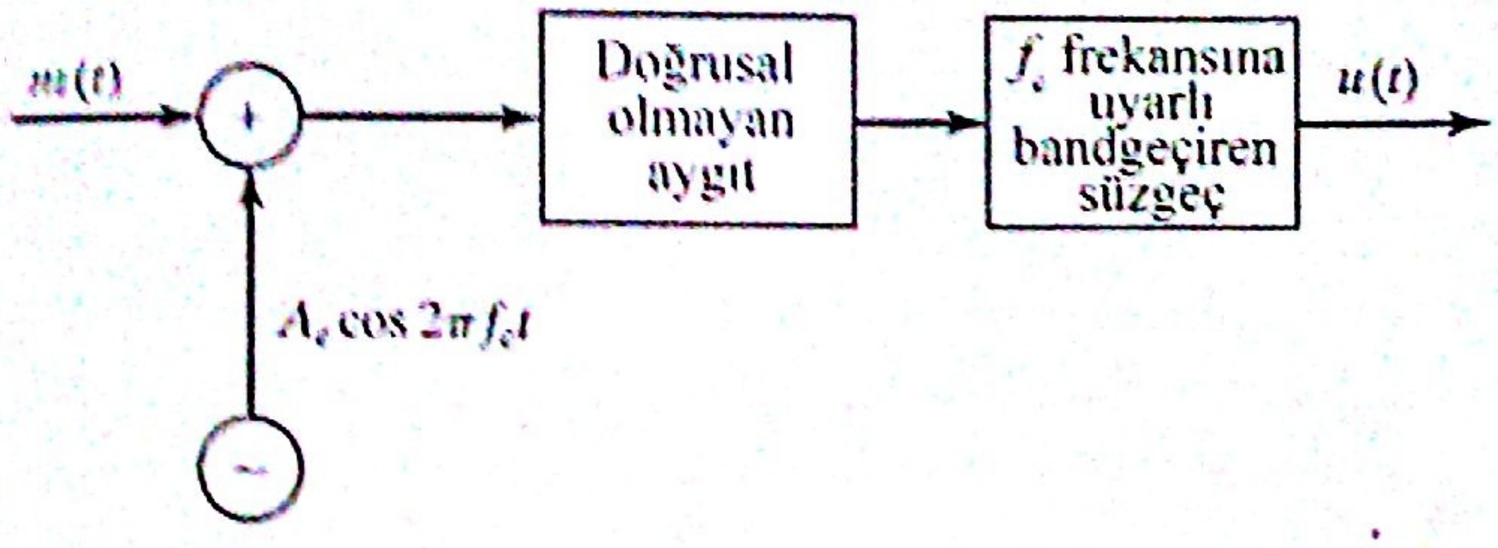
olur. AYB süzgeç $2 \le |f - f_c| \le 10$ frekans aralığında birim kazanca, $f = f_c$ değerinde 1/2 kazanca $f = f_c + 1$ frekansında $1/2 + \alpha$ kazanca ve $f = f_c - 1$ frekansında $1/2 - \alpha$ kazanca sahip olacak şekilde tasarlanabilir. Burada α, $0 < \alpha < 1/2$ şartını sağlayacak uygunlukta seçilen bir parametredir. Şekil 3.21 tasarlanan AYB süzgecin frekans tepki karakteristiğini göstermektedir.

3.3 GM MODÜLATÖRLERİN VE DEMODÜLATÖRLERİN UYARLANMASI

GM modülasyonlu işaret üretmenin birçok yöntemi vardır. Bu bölümde, pratikte en çok kullanılan yöntemleri tanımlayacağız.



Şekil 3.22. P-N diyodun gerilim-akım karakteristiği



Şekil 3.23. Güç-kanunu GM modülatörün blok diyagramı

Modülasyon süreci orijinal işarette mevcut olmayan yeni frekans bileşenleri ürettiğinden dolayı modülatörler genel olarak doğrusal olmayan ve/veya zamanla değişen sistemler olarak karakterize edilir.

Güç-Kanunu Modülatörü. Gerilim-akım karakteristiği Şekil 3.22'de gösterilen P-N diyot gibi doğrusal olmayan bir aygıt kullanımını göz önüne alalım.

Varsayalım ki, Şekil 3.23'de olduğu gibi bu aygıta giriş olarak verilen gerilim mesaj işareti $m(t)$ ile taşıyıcı $A_c \cos 2\pi f_c t$ işaretinin toplamı olsun. Aygıtın doğrusal olmama özelliği, sistem çıkışında $m(t)$ işareti ile taşıyıcı işaretin çarpımı ve artı olarak ek terimler oluşturacaktır. Arzu edilen modülasyonlu işaret, doğrusal olmayan bu aygıtın çıkışını bir bandgeçiren süzgeçten geçirerek elde edilebilir.

Daha açık olarak göstermek için, doğrusal olmayan aygıtın giriş-çıkış karakteristiğinin aşağıdaki formda olduğunu varsayalım. (kare-kanunu)

$$v_0(t) = a_1 v_i(t) + a_2 v_i^2(t) \tag{3.3.1}$$

Burada $v_i(t)$ giriş işareti $v_o(t)$ çıkış işareti ve (a_1, a_2) sabit parametrelerdir. Bu durumda eğer doğrusal olmayan aygıta verilen giriş

$$v_i(t) = m(t) + A_c \cos 2\pi f_c t \tag{3.3.2}$$

şeklinde ise çıkış

$$\begin{aligned} v_o(t) &= a_1[m(t) + A_c \cos 2\pi f_c t] \\ &\quad + a_2[m(t) + A_c \cos\cos 2\pi f_c t]^2 \\ &= a_1 m(t) + a_2 m^2(t) + a_2 A_c^2 \cos^2 2\pi f_c t \\ &\quad + A_c a_1 \left[1 + \frac{2a_2}{a_1} m(t)\right] \cos 2\pi f_c t \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

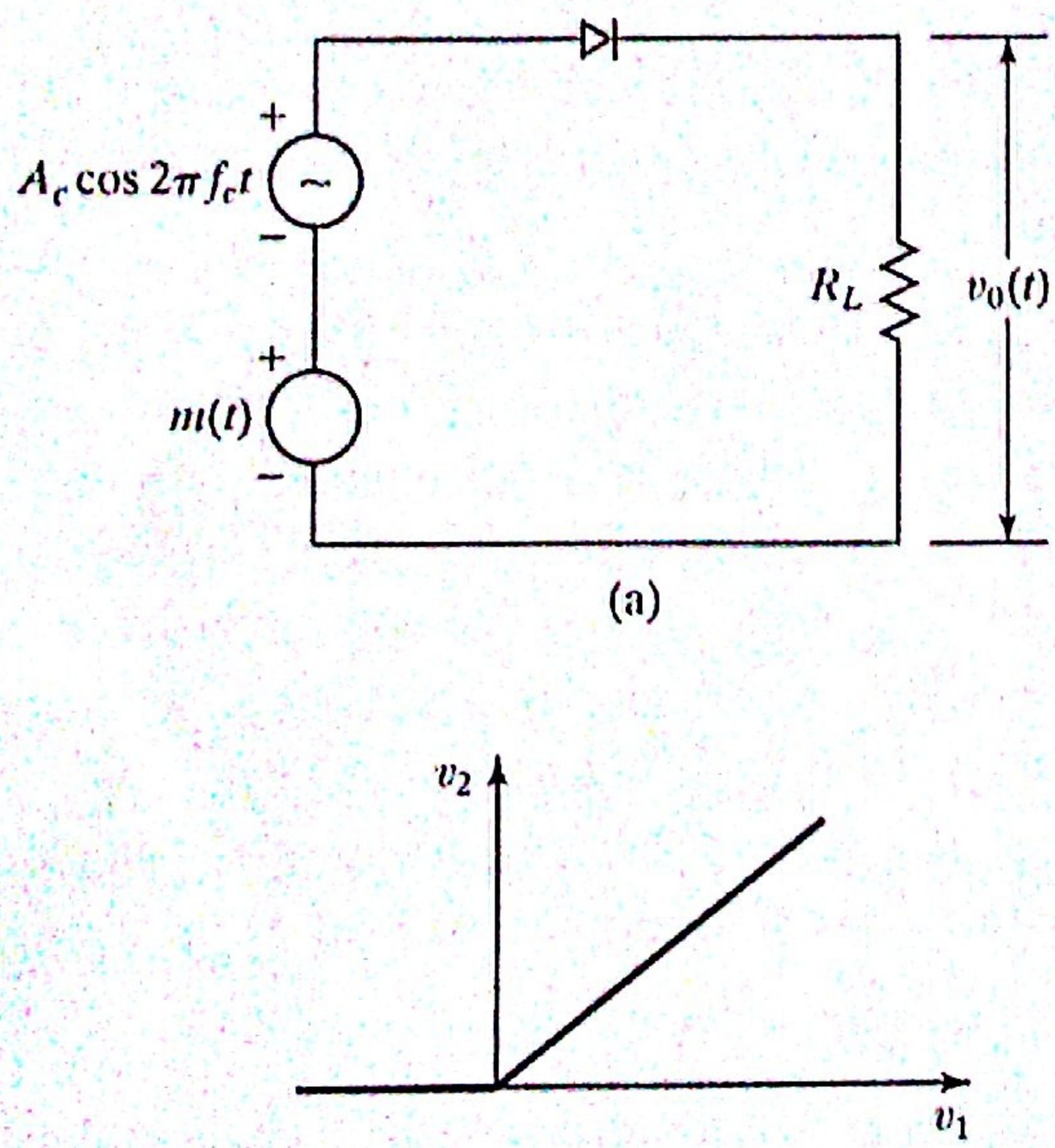
olur.

$f = f_c$ noktasında $2W$ bandgenişliğine sahip bandgeçiren süzgeç çıkışı

$$u(t) = A_c a_1 \left[1 + \frac{2a_2}{a_1} m(t)\right] \cos 2\pi f_c t \tag{3.3.4}$$

şeklinde olur. Burada $2a_2 |m(t)| / a_1 < 1$ olarak seçilmiştir. Dolayısı ile bu yöntem tarafından üretilen işaret geleneksel GM işarettir.

Anahtarlamalı Modülatör. GM modülasyonlu işaret üretiminin diğer bir yöntemi anahtarlamalı modülatör kullanılmasıdır. Bu tür modülatörler Şekil 3.248(a) da gösterilen sistemler kullanılarak gerçekleştirilebilir. Denklem (3.3.2) de verilen mesaj işareti ve taşıyıcı işaretin toplamı $v_i(t)$, giriş çıkış karakteristiği Şekil 3.24(b) de verilen bir diyoda giriş olarak uygulanır. Burada $A_c >> m(t)$ dir.



Şekil 3.24. Anahtarlamalı modülatör ve periyodik anahtarlama işareti

Yük direnci üzerindeki çıkış basitçe

$$v_0(t) = \begin{cases} v_i(t), & c(t) > 0 \\ 0, & c(t) < 0 \end{cases} \tag{3.3.5}$$

şeklindedir. Bu anahtarlama işlemi matematiksel olarak giriş işareti $v_i(t)$ ile anahtarlama işareti $s(t)$ nin çarpımı olarak görülebilir yani

$$v_0(t) = [m(t) + A_c \cos 2\pi f_c t]s(t) \tag{3.3.6}$$

$s(t)$ Şekil 3.24(c)'de gösterilmiştir.

$s(t)$ periyodik bir işaret olduğu için bu işaretin Fourier seri açılımı

$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos[2\pi f_c t(2n-1)] \tag{3.3.7}$$

şeklinde verilir. Bu (2.2.11) denklemine benzer bir denklemdir. Dolayısı ile

$$\begin{aligned} v_0(t) &= [m(t) + A_c \cos 2\pi f_c t]s(t) \\ &= \frac{A_c}{2}\left[1 + \frac{4}{\pi A_c} m(t)\right] \cos 2\pi f_c t + \text{other terms} \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

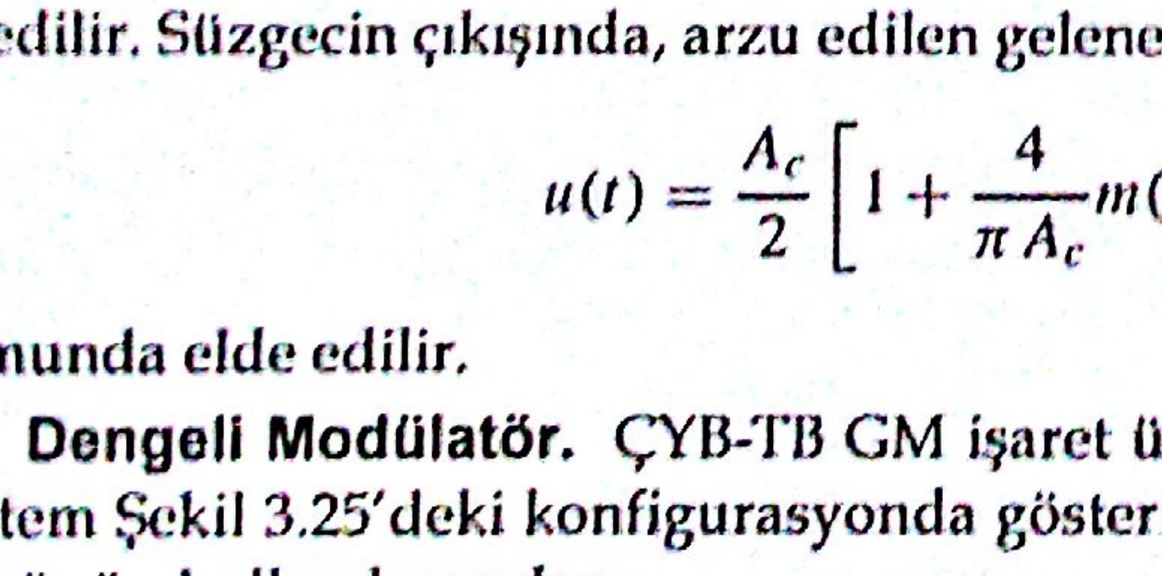
şeklinde olur. Arzu edilen GM modülasyonlu işaret merkez frekansı $f = f_c$ ve bandgenişliği $2W$ olan bir bandgeçiren süzgeçten $v_0(t)$ işaretinin geçirilmesi ile elde edilir. Süzgecin çıkışında, arzu edilen geleneksek GM işaret

$$u(t) = \frac{A_c}{2}\left[1 + \frac{4}{\pi A_c} m(t)\right] \cos 2\pi f_c t \tag{3.3.9}$$

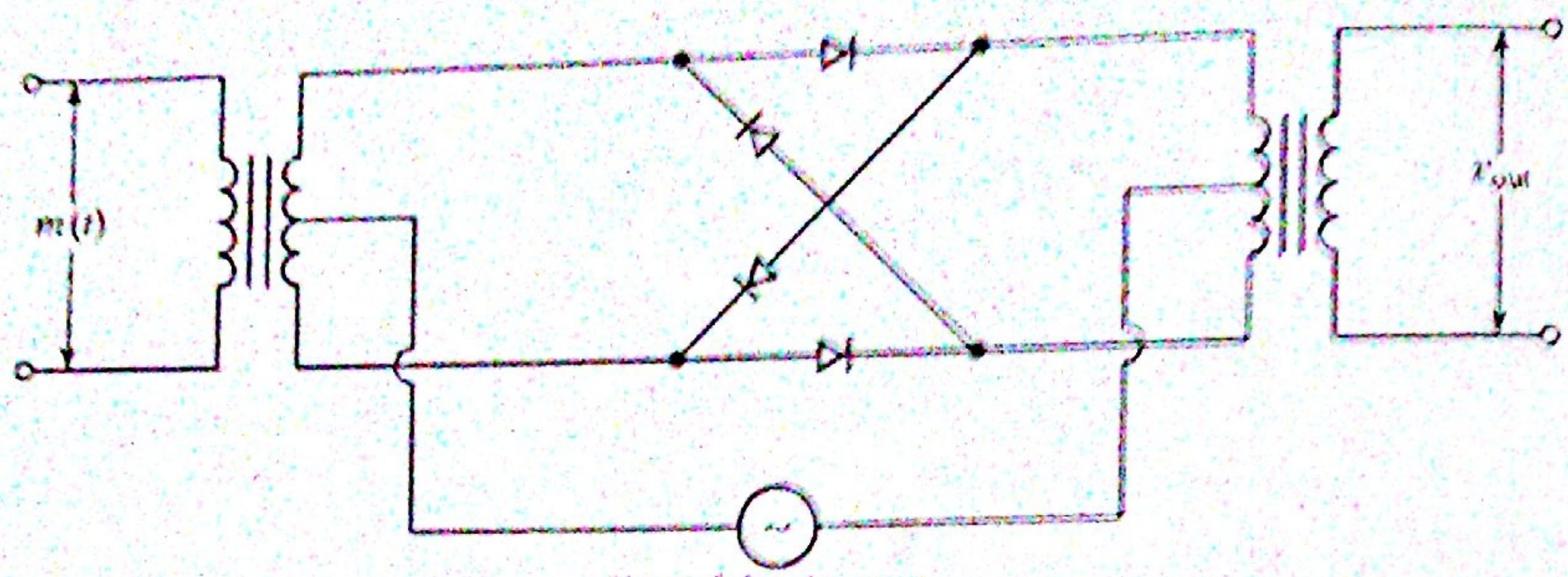
formunda elde edilir.

Dengeli Modülatör. ÇYB-TB GM işaret üretimi için göreceli olarak basit bir yöntem Şekil 3.25'deki konfigurasyonda gösterildiği gibi iki geleneksel GM modülatörünün kullanılmasıdır.

Örneğin, yukarıda tanımlanmış olan kare-kanunu iki GM modülatörü kullanılabilir. Taşıyıcı bileşenin toplama noktasında birbirlerini yok edebilmeleri için seçilecek modülatörlerin yaklaşık olarak birbirinin aynı karakteristiklere sahip olmasına özen gösterilmelidir.



Şekil 3.25 Dengeli modülatör blok diyagramı



Şekil 3.26. ÇYB-TB GM üretimi için halka modülatörü

Halka (Ring) Modülatörü. ÇYB-TB GM işareti üretmek için kullanılabilecek bir başka modülatör Şekil 3.26'da gösterilen *halka modülatörüdür.*

Diyotların anahtarlaması $c(t)$ olarak gösterilen, iki trafonun orta noktasına uygulanan f_c frekansına sahip bir kare darbe ile kontrol edilmektedir. $c(t) >$ olduğunda üst ve alt diyotlar iletimde iken çapraz kollardaki diyotlar kesimde olacaktır. Bu durumda, $m(t)$ mesaj işareti +1 ile çarpılır. $c(t) < 0$ olduğunda ise halkanın çapraz kollarındaki diyotlar iletimde iken diğer iki diyot kesimde olacak. Bu durumda $m(t)$ mesaj işareti -1 ile çarpılır. Sonuç olarak, halka modülatörün çalışması matematiksel olarak $m(t)$ işaretinin bir kare-dalga çarpıcı $c(t)$ ile çarpımı şeklinde ifade edilebilir. Yani Şekil 3.26'da gösterildiği gibi

$$v_0(t) = m(t)c(t) \tag{3.3.10}$$

olur. $c(t)$ periyodik bir fonksiyon olduğundan, Fourier seri açılımı

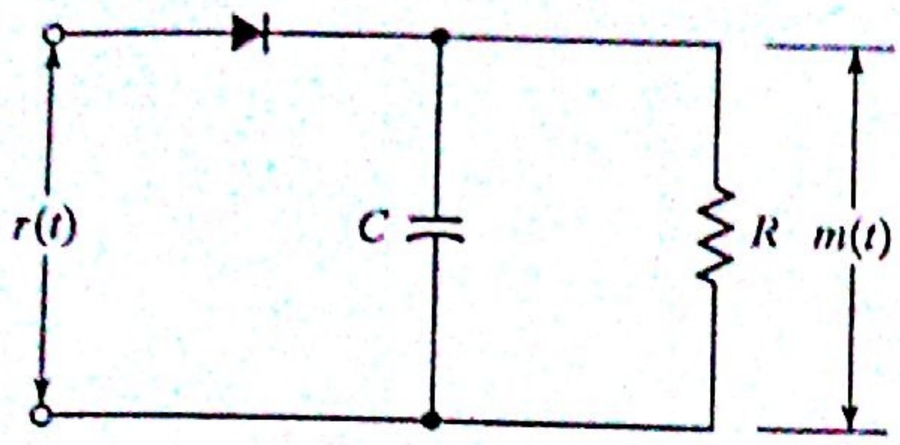
$$c(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos[2\pi f_c(2n-1)t] \tag{3.3.11}$$

Şeklinde ifade edilir. Yinebu ifade denklem (2.2.11)'e benzerdir. Dolayısı ile arzu edilen ÇYB-TB GM işaret $u(t)$, $v_0(t)$ işaretinin merkez frekansı f_c ve bandgenişliği $2W$ olan bir bandgeçiren süzgeçten geçirilmesi ile elde edilir.

Yukarıdaki tartışmalardan, dengeli modülatör ve halka modülatörün aslında ÇYB-TB GM işaret elde etmek için, mesaj işareti $m(t)$'i taşıyıcı ile çarpmakta olduğunu görmekteyiz. $m(t)$ işaretinin $A_c \cos \omega_c t$ ile çarpımı karışım işlemi olarak adlandırılır. Dolayısı ile *karıştırıcı (mixer)* aslında gerçekte bir dengeli modülatördür.

TYB işaret üretmek için Şekil 3.15'de gösterilen yöntem Hilbert dönüştürücünün yanında iki karıştırıcıya gereksinim gösterir; yani iki dengeli modülatöre. Öte yandan, TYB işaret üretmek için Şekli 3.16'da gösterilen süzgeç yöntemi tek bir dengeli modülatör ve yanband süzgecine gereksinim duyar.

Şimdi de GM işaretlerin demodülasyonunu ele alalım. İlk olarak zarf detektörünün tanımlanması ile başlayalım.



Şekil 3.27 Bir zarf detektörü

Zarf Detektörü. Daha öncede ifade edildiği gibi, geleneksel ÇYB-GM işaretler bir zarf detektörü kullanılarak kolaylıkla demodüle edilebilirler. Şekil 3.27'de zarf detektörü için devre şeması verilmiştir. Temelde basit bir alçakgeçiren süzgeç olan bir diyot ve bir RC devresinden oluşmaktadır.

Giriş işaretinin pozitif yarısında, diyot iletime geçer ve kapasitör giriş işaretinin tepe değerine kadar şarj olur. Giriş kapasitör üzerindeki gerilim değerinin altında düştüğünde, diyot ters kutuplanır ve girişin çıkışa bağlantısı kopar. Bu süre içerisinde, kapasitör yük direnci üzerinden yavaşça boşalır. Taşıyıcının bir sonraki yarı periyodunda ise, giriş işareti kapasitör üzerindeki gerilimi aştığında diyot tekrar iletime geçer. Kapasitör tekrar giriş işaretinin tepe değerine kadar şarj olur ve bü süreç kendini tekrar eder.

RC zaman-sabiti taşıyıcı-modülasyonlu işaretin zarfındaki değişimleri takip edecek şekilde seçilmelidir. Eğer RC çok küçük ise, bu durumda süzgeç çıkışı her tepe değerinden sonra çok hızlı bir şekilde düşer ve modüle edilmiş işaretin zarfını yakın bir şekilde takip edemez. Bu alçak geçiren süzgeç bandgenişliğinin çok fazla büyük olduğu duruma karşılık gelir. Eğer RC çok fazla büyük ise, bu durumda ise kapasitörün boşalması çok yavaş olur ve tekrar çıkış modüle edilmiş işaretin zarfını takip edemez. Bu ise alçak geçiren süzgeç bandgenişliğinin çok küçük olduğu duruma karşılık gelir. Büyük ve küçük RC değerlerinin etkisi Şekil 3.28'de gösterilmiştir.

Gerçekte, zarf detektörünün iyi bir performans gösterebilmesi için

$$\frac{1}{f_c} \ll RC \ll \frac{1}{W}$$

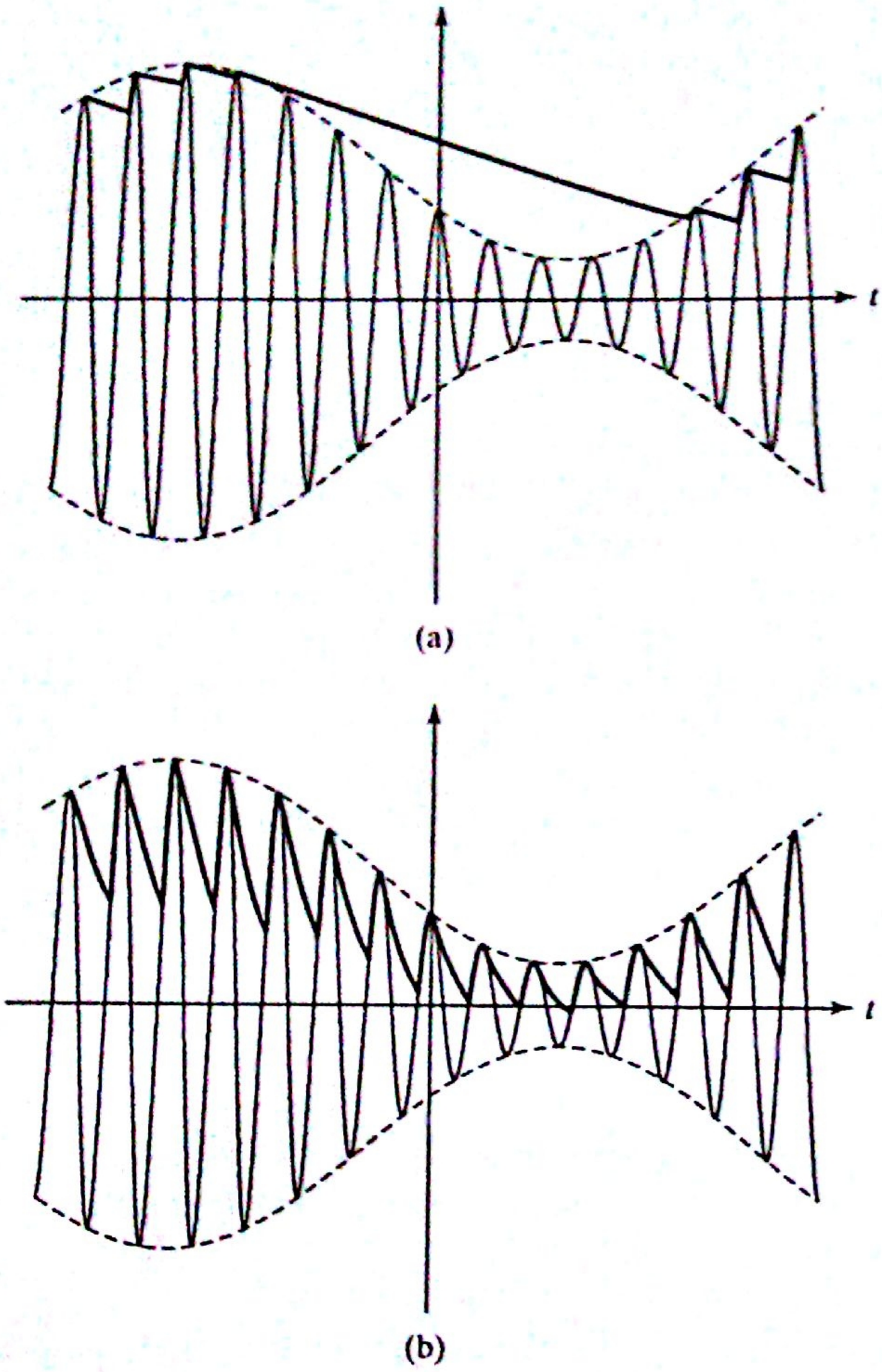
olmalıdır. Bu durumda kapasitör direnç üzerinden yavaşça boşalır; böylece, $\tilde{m}(t)$ olarak gösterilen zarf detektörünün çıkışı mesaj işaretini yakın bir şekilde takip eder.

Örnek 3.3.1

Bandgenişliği $W = 5$ kHz olan bir ses işareti 1 MHz taşıyıcı frekansı ile geleneksel GM modülasyonu kullanılarak modüle edilmektedir. Zarf detektörü kullanılarak başarılı bir şekilde demodülasyon yapabilmek için gerekli olan RC değerlerini belirleyin.

Çözüm $\frac{1}{f_c} \ll RC \ll \frac{1}{W}$ olmalı; bundan dolayı $10^{-6} \ll RC \ll 2 \times 10^{-4}$. Bu durumda $RC = 10^{-5}$ uygun bir seçimdir.

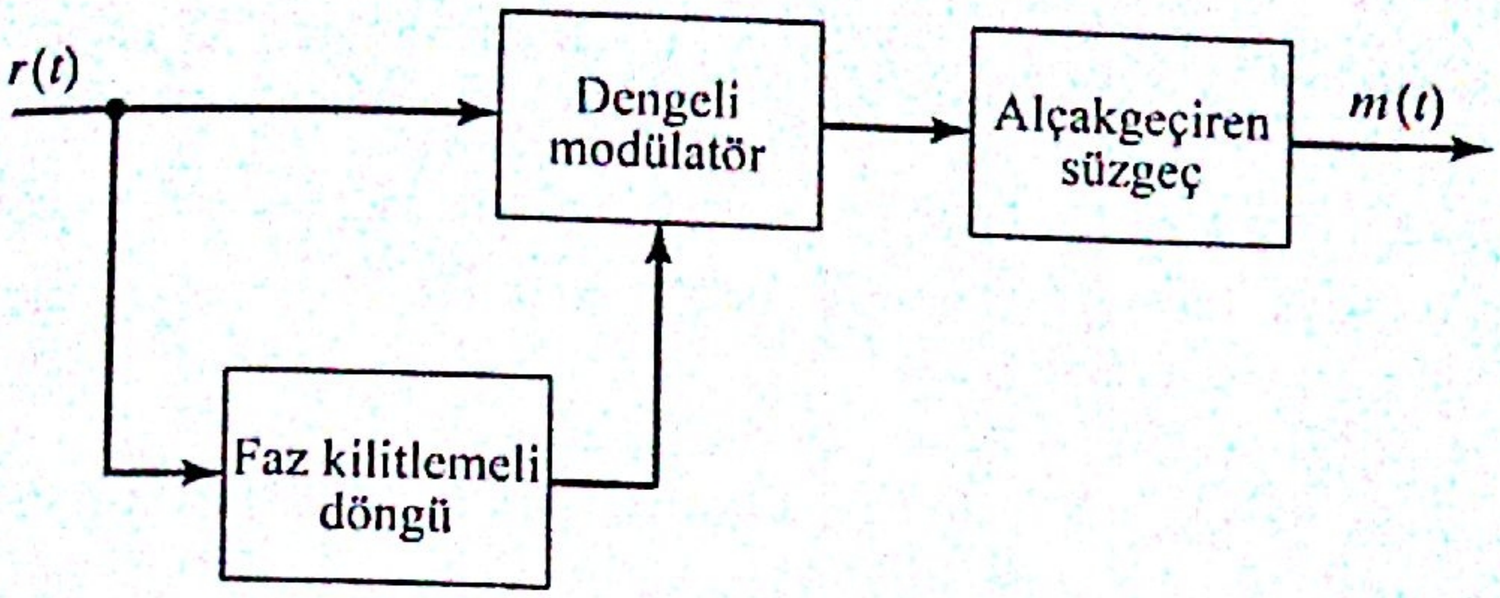
ÇYB-TB GM İşaretlerinin Demodülasyonu. Daha önce belirtildiği gibi, ÇYB-TB GM işaretinin demodülasyonu eşzamanlı demodülatör gerektirir. Yani demodülatör işareti demodüle edebilmek için, genellikle faz kilitlemeli döngü (Phase Locked Loop –PLL) yardımı ile elde edilen, bir uyumlu faz referansı kullanmak zorundadır.



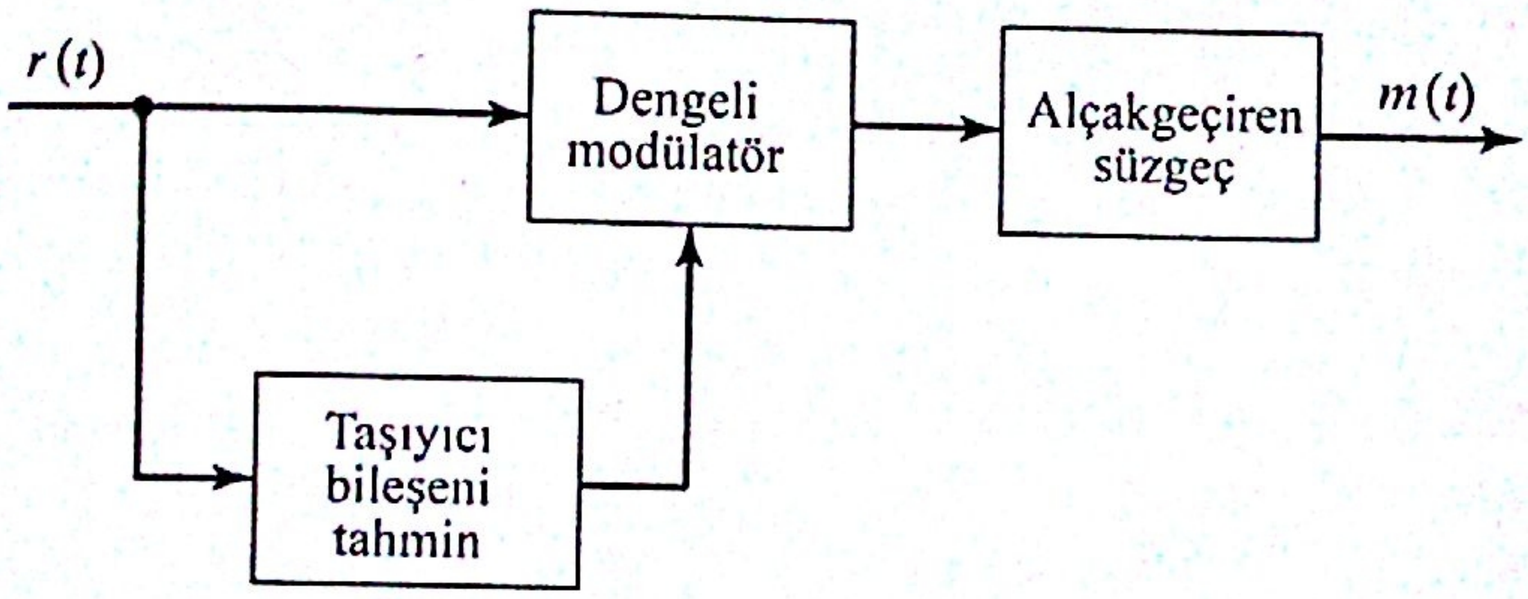
Şekil 3.28 (a) Büyük (b) küçük RC değerlerinin zarf detektörünün performansı üzerindeki etkisi

Genel konfigurasyon Şekil 3.29'da gösterilmektedir. Bir PLL, dengeli modülatörde alınan işaret işe çarpılan bir faz uyumlu taşıyıcı işaret üretir. Dengeli modülatörün çıkışı bandgenişliği W olan ve arzu edilen işareti geçirir iken W Hz'den daha büyük frekans bileşenlerine sahip diğer tüm işaretleri ve gürültüyü bastıran bir alçak geçiren süzgeçten geçirilir. PLL'in çalışması ve karakteristiği Şekil 3.16'da açıklanmıştır.

TYB İşaretlerin Demodülasyonu. TYB–GM işaretlerin demodülasyonu da faz uyumlu bir referans gerektirir. Ses işareti gibi göreceli olarak az veya hiç DC bileşeni olmayan işaretler için, TYB işareti Şekil 3.16'da gösterildiği gibi elde etmek basittir. Daha sonra mesaj ile birlikte iletilecek küçük bir taşıyıcı bileşen eklenir.



Şekil 3.29. ÇYB-TB işaret demodülatörü



Şekil 3.30. Taşıyıcı bileşen içeren TYB-GM işaretin demodülasyonu

Bu durumda TYB işareti demodüle etmek için Şekil 3.30'da gösterilen konfigurasyonu kullanabiliriz. Burada bandgeçiren işareti alçakgeçiren veya temel band işarete dönüştürmek için dengeli modülatör kullanıldığına dikkat edin.

AYB İşaretlerin Demodülasyonu. AYB modülasyonda, bir taşıyıcı bileşen genellikle mesaj yanbandları ile iletilir. Taşıyıcı bileşenin mevcudiyeti, Şekil 3.30'da gösterildiği gibi, dengeli modülatörde demodülasyonun gerçekleştirilmesi için gerekli olan faz uyumlu referansın elde edilmesini mümkün kılar.

TV yayıncılığı gibi uygulamalarda, AYB işaretinde, mesaj işareti ile birlikte büyük bir taşıyıcı bileşen iletilir. Bu şekilde, mesaj işaretinin, AYB işaretin bir zarf detektöründen geçirilmesi ile yeniden elde edilmesi mümkün olur.

3.4 İŞARET ÇOĞULLAMA

Bir taşıyıcı sinüzoidalin genliğini modüle etmek için bir $m(t)$ mesaj işareti kullandığımızda, mesaj işaretini frekans düzleminde, taşıyıcı frekansı f_c ye denk bir frekans değerinde öteleriz. Eğer kanal üzerinde aynı anda iletilmesi gereken iki veya daha fazla işaret var ise her bir mesaj işareti farklı frekanstaki taşıyıcıları modüle etmelidir. Bu tür bir uygulamada, birbirini izleyen taşıyıcılar arasındaki minimum fark, W her bir mesaj işaretinin bandgenişliği olmak üzere, 2W (ÇYB GM için) veya W (TYB GM için) olmalıdır.

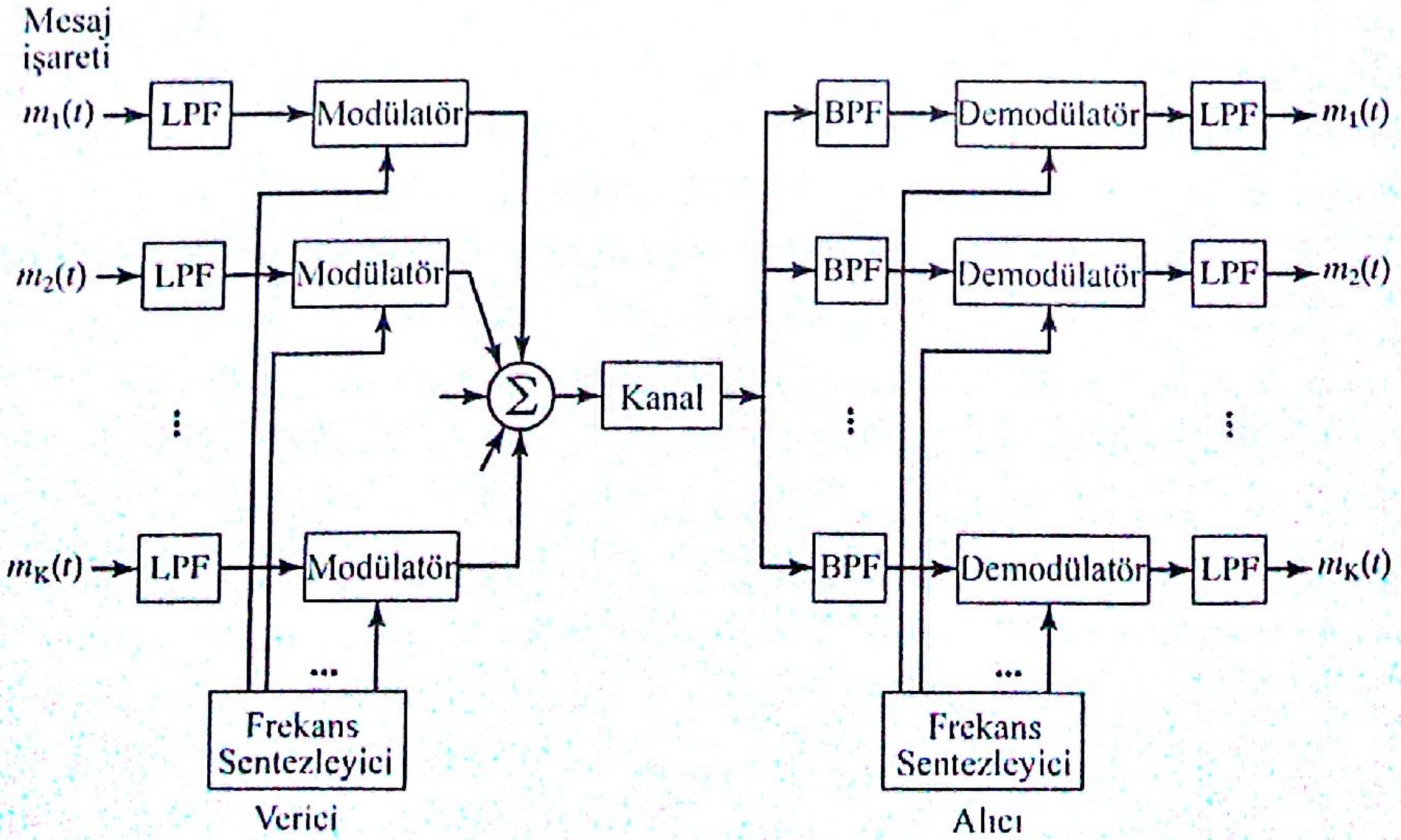
Böylelikle farklı mesaj işaretleri kanalın farklı frekans bandlarını işgal eder ve iletim esnasında birbirleri ile karışım oluşturmazlar.

Farklı mesaj işaretlerini, ortak bir kanal üzerinden iletmek için, bir bileşik işaret haline getirmek *çoğullama (multiplexing)* olarak isimlendirilir. İşaret çoğullamada kullanılan iki temel yöntem vardır: (1) zaman bölmeli çoğullama (2) frekans bölmeli çoğullama. Zaman bölmeli çoğullama genellikle sayısal işaretlerin iletiminde kullanılır; bu ilerleyen bölümlerde ele alınacaktır. Frekans bölmeli çoğullama (FBÇ) (Frequency-division multiplexing: FDM) ise hem analog ve hem sayısal işaret iletiminde kullanılabilir.

3.4.1 Frekans Bölmeli Çoğullama

FBÇ yönteminde, mesaj işaretleri, yukarıda ifade edildiği gibi, frekansta birbirinden ayrıştırılır. Tipik bir FBÇ konfigurasyonu Şekil 3.31'de gösterilmektedir. Şekil, *K adet* mesaj işaretinin vericide, frekans bölmeli çoğullamasını ve alıcıda demodüle edilmesini göstermektedir. Vericideki alçak geçiren süzgeçler mesaj işaretlerinin bandgenişliğinin W Hz'e sınırlandırılmasını garanti etmektedir. Her bir işaret farklı bir taşıyıcı işareti modüle eder; dolayısı ile K adet modülatör gereklidir. Sonra, K modülatörden elde edilen işaretler toplanır ve kanal üzerinden iletilir . TYB ve AYB modülasyon için, modülatör çıkışı, modüle edilmiş işaretlerin toplamından önce, süzgeçlenir.

Bir FBÇ sistemin alıcısında, işaretler genellikle bir paralel bandgeçiren süzgeç öbeğinden geçirilerek ayrıştırılır. Bu uygulamada her bir süzgeç bir taşıyıcı frekansa ayarlanmıştır ve sadece arzu edilen işareti geçirecek büyüklükte bir bandgenişliğine sahiptirler. Her bir bandgeçiren süzgecin çıkışı demodüle edilir ve her bir demodüle edilmiş işaret sadece temel band işareti geçiren ve yüksek



Şekil 3.31. Çok sayıda işaretin frekans bölmeli çoğullaması

frekanslı bileşenleri yok eden alçak geçiren bir süzgece giriş olarak verilir.

FBÇ radyo ve telefon haberleşmesinde yoğun olarak kullanılır. Telefon haberleşmesinde, her bir ses mesaj işareti 4 kHz'lik bir anma (nominal) bandgenişliği kaplar. Mesaj işareti üzerinde bandgenişliği açısından verimli bir iletim için tekyanband modülasyonu uygulanır. Çoğullamanın ilk seviyesinde, 12 işaret, bitişik taşıyıcılar arasında 4 kHz frekans farkı olacak şekilde, frekansta gruplandırılır. Böylelikle, *grup kanal* olarak isimlendirilen 48 kHz'lik kanal, 12 ses bandı işaretini eş zamanlı olarak iletir. FBÇ'nın ikinci seviyesinde ise, birkaç grup kanal (genellikle beş veya altı) frekansta bir araya getirilerek *süper grup kanalı* oluşturulur. Sonra bileşik işaret kanal üzerinden iletilir. Daha yüksek çoğullama süper grup kanallarının birleştirilmesi ile elde edilebilir. Böylelikle, FBÇ hiyerarşisi telefon haberleşme sistemlerinde kullanılır.

3.4.2 Dik-Taşıyıcı Çoğullama

Bir başka çoğullama aynı taşıyıcı frekansta iki farklı mesaj işaretinin iletimini mümkün kılar. Bu tip çoğullama $A_c \cos 2\pi f_c t$ ve $A_c \sin 2\pi f_c t$ gibi iki dik taşıyıcı kullanır. Daha açık olarak, $m_1(t)$ ve $m_2(t)$'in kanal üzerinden iletilecek iki farklı mesaj işareti olduğunu varsayalım. $m_1(t)$ $A_c \cos 2\pi f_c t$ taşıyıcı işaret üzerinde genlik modülasyonu yapar iken, $m_2(t)$ $A_c \sin 2\pi f_c t$ taşıyıcı işaret üzerinde genlik modülasyonu gerçekleştirir. Bu iki işaret daha sonra toplanır ve kanal üzerinden iletilir. İletilen işaret

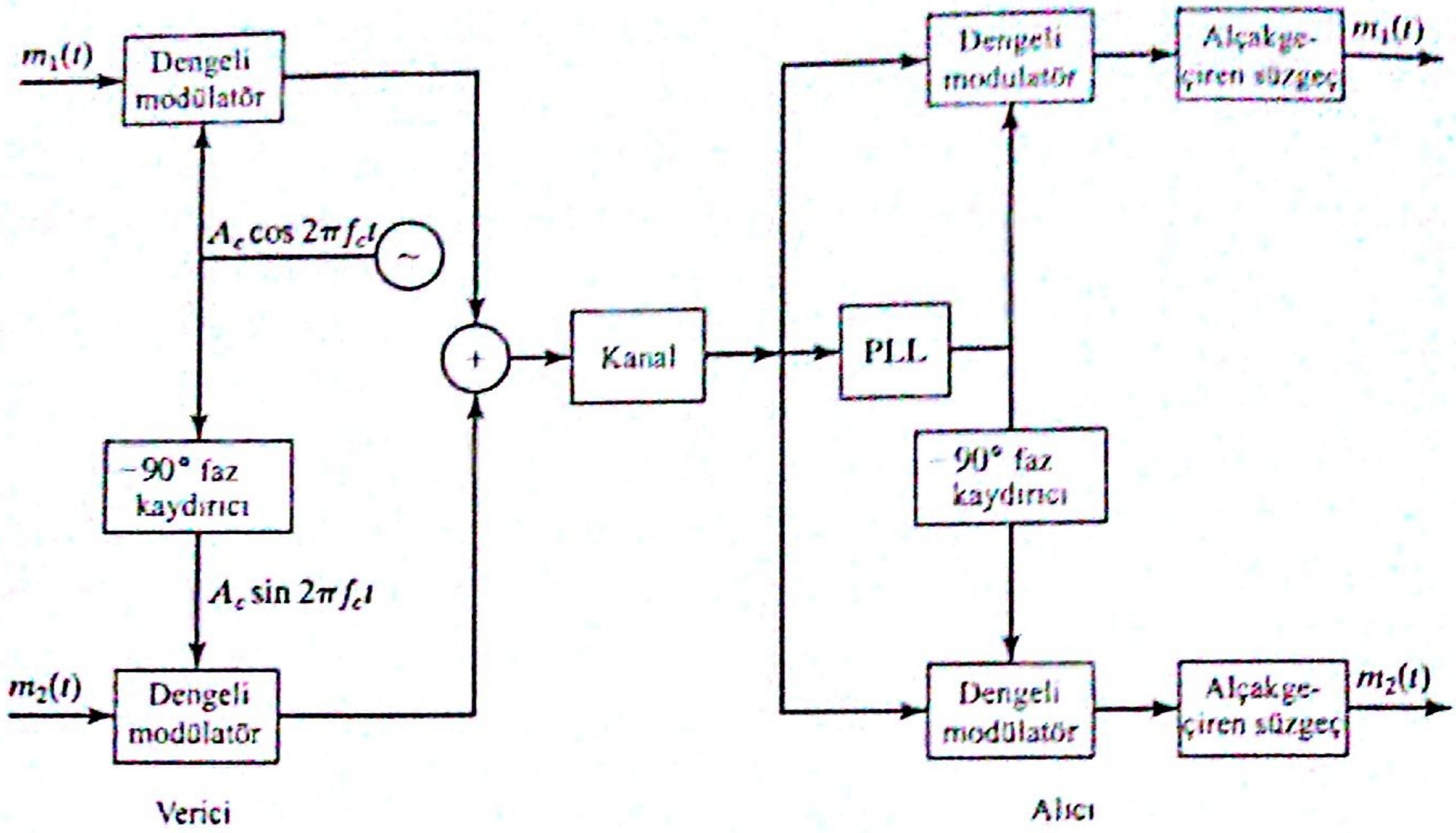
$$u(t) = A_c m_1(t) \cos 2\pi f_c t + A_c m_2(t) \sin 2\pi f_c t \tag{3.4.1}$$

şeklindedir. Dolayısı ile her bir mesaj işareti ÇYB-TB GM olarak iletilir. Bu tip işaret çoğullama *dik-bileşen çoğullama* olarak adlandırılır. Dik bileşen çoğullama, TYB GM band verimliliği ile kıyaslanabilecek, band verimli bir haberleşme sistemi sağlar. Şekil 3.32 dik taşıyıcı çoğullama işaretlerinin modülasyon ve demodülasyonunu göstermektedir. Görüldüğü gibi, alıcıda dik bileşen modülasyonlu işaretin ayrıştırılması ve tekrar mesaj işaretlerinin elde edilebilmesi için eşzamanlı demodülatör kullanımı gerekmektedir.

$m_1(t)$ işaretinin demodülasyonu $u(t)$ işaretinin $\cos 2\pi f_c t$ ile çarpılmasıyla gerçekleştirilir ve sonra elde edilen sonuç bir alçak geçiren süzgeçten geçirilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} u(t) \cos 2\pi f_c t &= A_c m_1(t) \cos^2 2\pi f_c t + A_c m_2(t) \cos 2\pi f_c t \sin 2\pi f_c t \\ &= \frac{A_c}{2} m_1(t) + \frac{A_c}{2} m_1(t) \cos 4\pi f_c t + \frac{A_c}{2} m_2(t) \sin 4\pi f_c t \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki bu işaret $\frac{A_c}{2}$ şeklinde bir alçakgeçiren bileşen ve iki yüksek frekanslı bileşen içerir. Alçakgeçiren bileşen bir alçak geçiren süzgeç yardımı ile ayrıştırılır. Benzer şekilde $m_2(t)$ işaretinin demodülasyonu için $u(t)$ $\sin 2\pi f_c t$ ile çarpılır ve alçak geçiren bir süzgeçten geçirilir.



Şekil 3.32. Dik taşıyıcı çoğullama

3.5 GM RADYO YAYINCILIĞI

GM radyo yayıncılığı analog işaret iletimi ile gerçekleştirilen en bilinen iletişim şeklidir. Ticari GM radyo yayıncılığı ses ve müzik iletimi için 535 – 1605 kHz frekans bandını kullanır. Taşıyıcı frekans tahsisi 10 kHz aralıklar ile 540-1600 kHz arasına yayılmıştır.

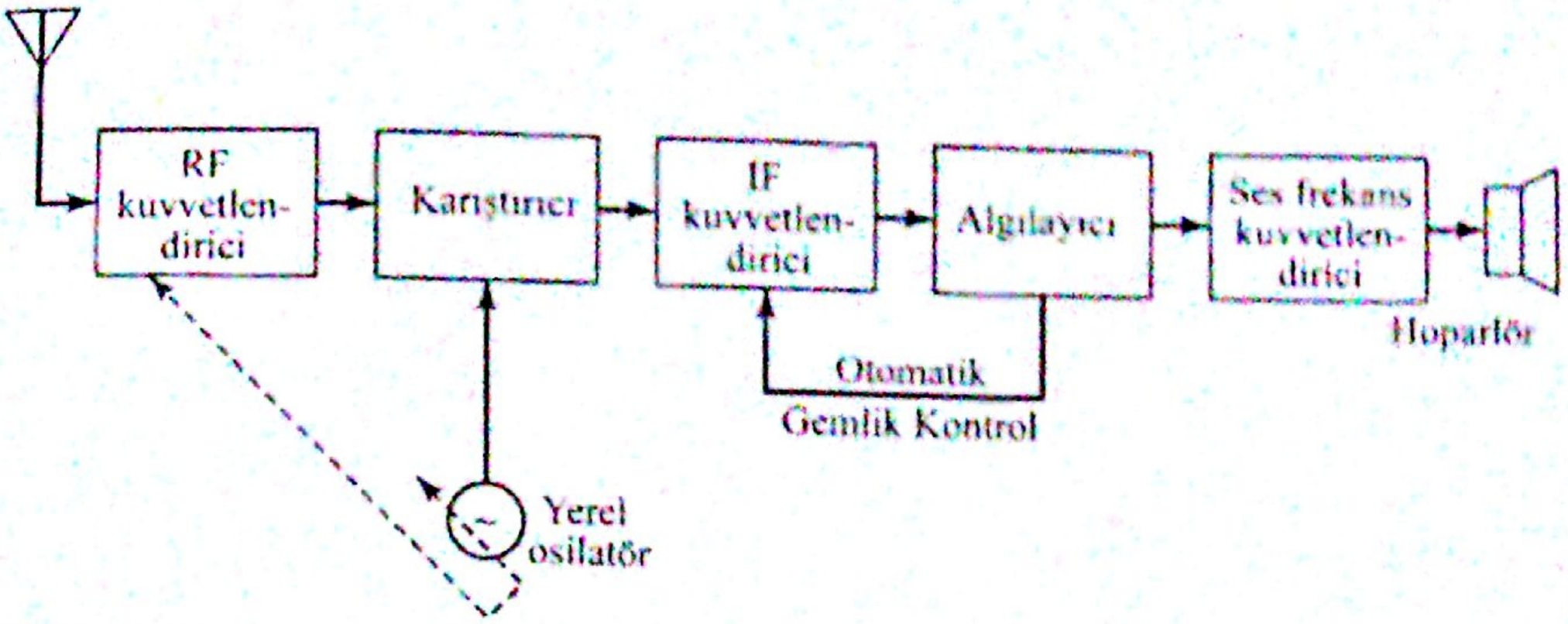
Radyo istasyonları işaret iletimi için geleneksel GM kullanır. Temelband işaret $m(t)$ 5 kHz'lik bir bandgenişliği ile sınırlandırılır. Milyonlarca alıcı olmasına rağmen sadece birkaç verici olduğu için, yayın için geleneksel GM kullanımı sadece ekonomik gerekçelere dayanır. Temel hedef alıcı maliyetlerinin düşürülmesidir.

GM radyo yayıncılığında en yaygın olarak kullanılan alıcı *superheterodyne alıcı* olarak isimlendirilen ve Şekil 3.33'de gösterilen alıcıdır. Bu alıcı radyo frekans (radio frequency -RF) güçlendirici, bir karıştırıcı (mixer), bir lokal osilatör, bir ara frekans (intermediate frequency -IF) kuvvetlendirici, bir zarf detektör, bir ses frekans kuvvetlendirici ve hoparlörden oluşur. İstenilen radyo istasyonuna ayarlanabilmek, aynı zamanda RF (Radyo Frekans) kuvvetlendiriciyi ve lokal osilatörü ayarlayan, bir değişken kapasitör sayesinde gerçekleştirilir.

Superheterdyne alıcıda, her GM radyo işareti f_{IF} =455 kHz olan ortak bir IF frekansına dönüştürülür. Bu dönüşüm sayesinde frekans bandındaki herhangi bir radyo istasyonundan alınan işaret için tek-ayarlı bir IF kuvvetlendirici kullanılabilir. IF kuvvetlendirici mesaj işaretinin bandgenişliğine uyabilmesi için 10 kHz bandgenişliğine sahip olacak şekilde tasarlanmıştır.

IF frekans dönüşümü bir RF kuvvetlendirici ile birlikte bir karıştırıcının kombinasyonu ile gerçekleştirilir. Lokal osilatörün frekansı

$$f_{LO} = f_c + f_{IF}$$



Şekil 3.33. Superheterodyne alıcı

olur. Burada f_c istenilen GM radyo işaretinin frekansıdır. Osilatörün frekans aralığı 995-2055 kHz arasında değişim gösterir. RF kuvvetlendiricinin f_c frekansına ayarlanması ve kuvvetlendiricinin çıkışı ile lokal osilatörün $f_{LO} = f_c + f_{IF}$ şeklinde karıştırılması ile iki işaret bileşeni elde edilir; bunlardan biri fark frekansı olan f_{IF} merkez frekansında, diğeri ise toplam frekansı $2f_c + f_{IF}$ merkez frekansına yerleşmiştir. IF kuvvetlendiriciden sadece ilk bileşen geçecektir.

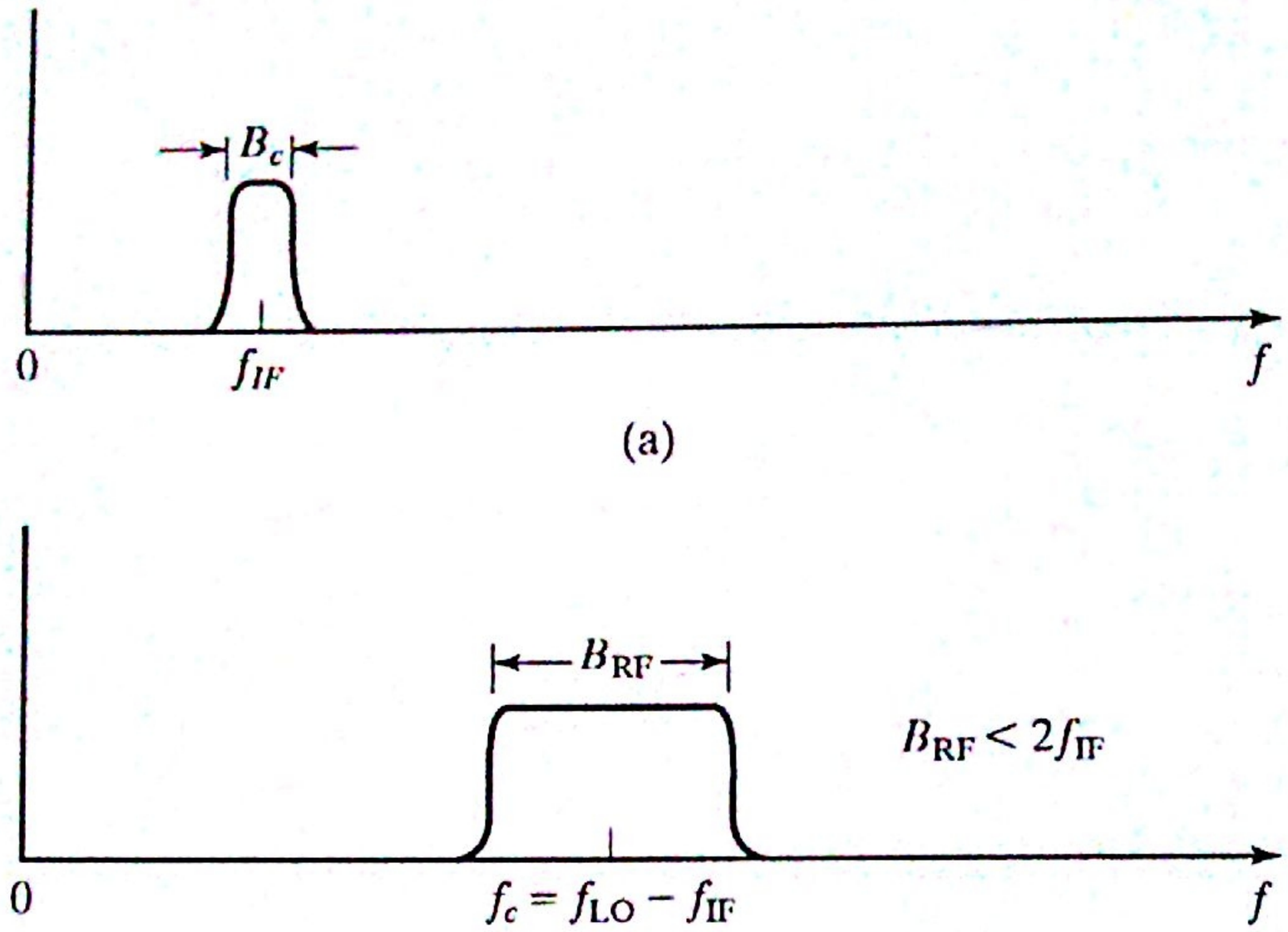
RF kuvvetlendiricinin girişinde, tüm radyo istasyonlarından anten yardımı ile alınmış işaretler mevcut olacaktır. RF kuvvetlendiricinin bandgenişliğini $B_c < B_{RF} < 2f_{IF}$ şeklindeki bir aralığa sınırlandırarak, *gölge frekansı* olarak adlandırılan $f_c' = f_{LO} + f_{IF}$ frekansında iletilen radyo işaretini bastırırız. Burada B_c GM radyo işaretinin bandgenişliğidir (10 kHz). $\cos 2\pi f_{LO}t$ şeklindeki lokal osilatörün çıkışı ile alınan işaret karıştırıldığında

$$r_1(t) = A_c[1 + m_1(t)]\cos 2\pi f_c t$$
$$r_2(t) = A_c[1 + m_2(t)]\cos 2\pi f_c' t$$

elde edilir. Burada $f_c = f_{LO} - f_{IF}$ ve $f_c' = f_{LO} + f_{IF}$ şeklindedir. Karıştırıcı çıkışı aşağıdaki iki işareti içerir

$$y_1(t) = A_c[1 + m_1(t)]\cos 2\pi f_{IF}(t) + \text{iki kat frekanslı terimler}$$
$$y_2(t) = A_c[1 + m_2(t)]\cos 2\pi f_{IF}(t) + \text{iki kat frekanslı terimler}$$

$m_1(t)$ arzu edilen işaret ve $m_2(t)$ ise $f_c' = f_{LO} + f_{IF}$ taşıyıcı frekansında yayın yapan radyo istasyonu tarafından gönderilen işarettir. $r_2(t)$ işaretinin, $r_1(t)$ işaretinin demodülasyonu ile karışım yapmasını engellemek için, RF kuvvetlendirici bandgenişliği yeterli derecede dar seçilerek gölge frekans işareti yok edilir. Dolayısı ile $B_{RF} < 2f_{IF}$ RF kuvvetlendiricinin bangenişliği için üst sınırdır. Bu kısıtlamaya rağmen, RF kuvvetlendiricinin bandgenişliği IF kuvvetlendiricinin bandgenişliğine nazaran oldukça geniştir. Böylece IF kuvvetlendirici dar bandgenişliği sayesinde komşu kanallardan gelen işaretleri bastırırken ve RF kuvvetlendirici gölge kanallardan gelen işaretleri reddeder. Şekil 3.34 RF ve IF kuvvetlendiricilerin bandgenişliklerini ve gölge frekans işaretinin reddedilme gereksinimini göstermektedir.



Şekil 3.34. IF ve RF kuvvetlendiricilerin frekans tepki karakteristikleri

IF kuvvetlendiricinin çıkışı, istenilen ses-bandı mesaj işareti *m(t)'i* üretecek bir zarf detektöründen geçirilir. Son olarak, zarf detektör çıkışı kuvvetlendirilir ve kuvvetlendirilmiş bu işaret hoparlöre verilir. Otomatik kazanç kontrolü zarf detektörünün çıkışındaki güç seviyesine bağlı olarak IF kuvvetlendiricinin kazancını ayarlayacak bir geribesleme kontrol döngüsü oluşturur.

EK 3A: TYB-GM İŞARETLERİN İFADESİNİN ELDE EDİLMESİ

m(t)'in Fourier dönüşümü (tayfı) *M(f)* olan bir işaret olduğunu varsayalım. Üstyanband genlik modülasyonlu işaret (UTYB GM) ÇYB genlik modülasyonlu işaretin altyanbandının yok edilmesi ile üretilir. Varsayalım ki ÇYB GM işaretin

$u_{USB}(t) = 2A_c m(t)\cos 2\pi f_c t$ altyanbandını transfer fonksiyonu Şekil 3.16 da gösterilen ve

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| > f_c \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde olan bir yüksekgeçiren süzgeç sayesinde yok ettik, $H(f)$ açık olarak

$$H(f) = u_{-1}(f - f_c) + u_{-1}(-f - f_c)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $u_{-1}(\cdot)$ birim basamak fonksiyonunu ifade etmektedir. Dolayısı ile UTYB-GM işaretin tayfı

$$U_u(f) = A_c M(f - f_c)u_{-1}(f - f_c) + A_c M(f + f_c)u_{-1}(-f - f_c)$$

veya yukarıdaki ifadeye denk bir şekilde

$$U_u(f) = A_c M(f)u_{-1}(f)_{|f=f-f_c} + A_c M(f)u_{-1}(-f)_{|f=f+f_c} \qquad (3A.1)$$

olarak verilebilir. (3A.1) denkleminin her iki tarafının ters Fourier dönüşümü alınarak ve Fourier dönüşümünün Şekil 2.3.14 ve Şekil 2.3.26 da gösterilen modülasyon ve evrişim özellikleri kullanılarak,

$$u_u(t) = A_c m(t) \star \mathcal{F}^{-1}\left[u_{-1}(f)\right] e^{j2\pi f_c t} +$$

$$A_c m(t) \star \mathcal{F}^{-1}\left[u_{-1}(-f)\right] e^{-j2\pi f_c t} \qquad (3A.2)$$

elde edilir. Sonra, denklen (2.3.12) ve çifteşlik teoremi göz önüne alınarak

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}\right] = u_{-1}(f)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{j}{2\pi t}\right] = u_{-1}(-f), \qquad (3A.3)$$

sonucu çıkarılır. (3A.3) denklemini (3A.2) de yerine korsak

$$u_u(t) = A_c m(t) \star \left[\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}\right] e^{j2\pi f_c t}$$

$$+ A_c m(t) \star \left[\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{j}{2\pi t}\right] e^{-j2\pi f_c t}$$

$$= \frac{A_c}{2}\left[m(t) + j\hat{m}(t)\right] e^{j2\pi f_c t} +$$

$$\frac{A_c}{2}\left[m(t) - j\hat{m}(t)\right] e^{-j2\pi f_c t} \qquad (3A.4)$$

elde edilir. Bu ifadenin elde edilmesine aşağıdaki şu eşitlikler kullanılmıştır.

$$m(t) \star \delta(t) = m(t)$$

$$m(t) \star \frac{1}{\pi t} = \hat{m}(t)$$

(3A.4) denkleminde Euler eşitliğini kullanarak UTYB GM işaretinin zaman düzlemi ifadesi

$$u_u(t) = A_c m(t) \cos 2\pi f_c t - A_c \hat{m}(t) \sin 2\pi f_c t \tag{3A.5}$$

elde edilir. LTYB GM işaretinin ifadesi ise

$$u_u(t) + u_\ell(t) = u_{\text{DSB}}(t)$$

veya

$$A_c m(t) \cos 2\pi f_c t - A_c \hat{m}(t) \sin 2\pi f_c t + u_\ell(t) = 2A_c m(t) \cos 2\pi f_c t$$

olduğu dikkate alınarak elde edilir.

Böylece

$$u_\ell(t) = A_c m(t) \cos 2\pi f_c t + A_c \hat{m}(t) \sin 2\pi f_c t \tag{3A.6}$$

olur. Dolayısı ile TYB GM işaretinin zaman düzlemi gösterimi genel olarak

$$u_{\text{SSB}}(t) = A_c m(t) \cos 2\pi f_c t \mp A_c \hat{m}(t) \sin 2\pi f_c t \tag{3A.7}$$

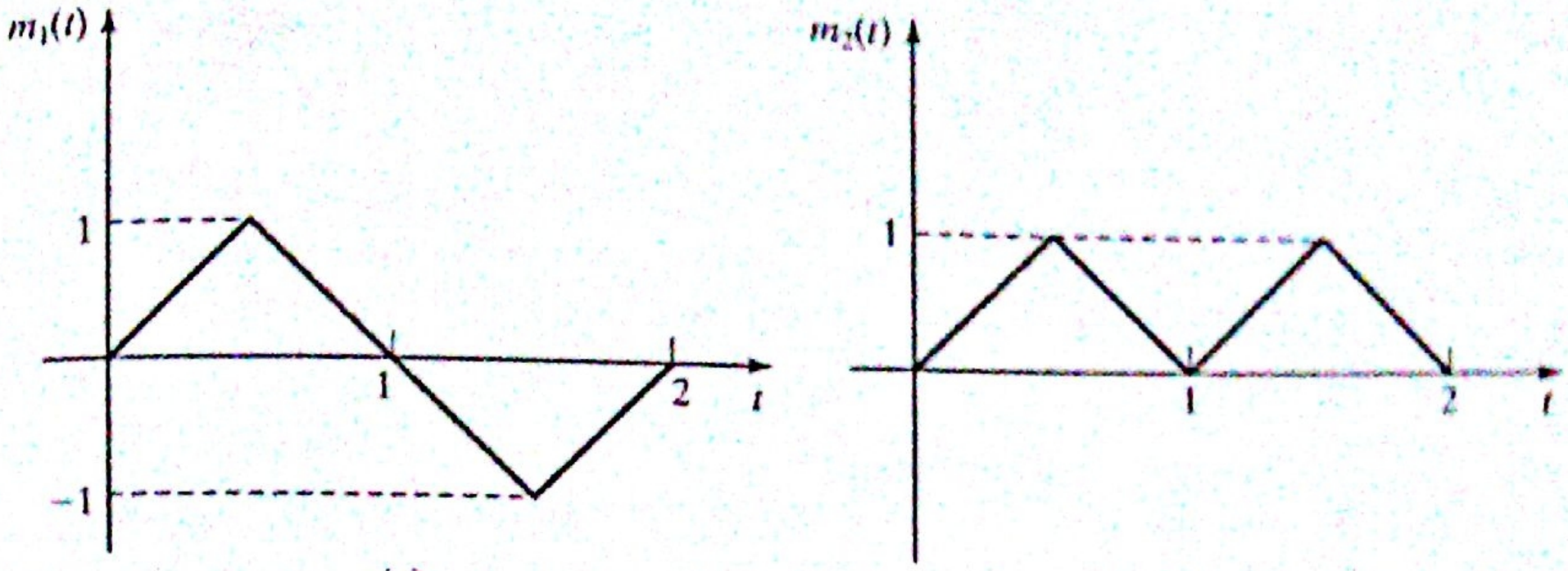
şeklinde ifade edilir. Burada eksi işareti UTYB GM işaretine ve artı işareti ATYB GM işaretine karşılık gelir.

PROBLEMLER

3.1 $m(t) = 2\cos 400t + 4\sin(500t + \frac{\pi}{3})$ mesaj işareti $c(t) = A\cos(8000\pi t)$ taşıyıcı işaretini ÇYB genlik modülasyon tekniği ile modüle etmektedir. Modüle edilmiş işaretin zaman ve frekans düzlemi gösterimini bulunuz ve modüle edilmiş işaretin tayfını (Fourier dönüşümünü) çizin. Modülasyonlu işaretin güç içeriği nedir?

3.2 Bir ÇYB sistemde taşıyıcı $c(t) = A\cos 2\pi f_c t$ ve mesaj işareti $m(t) = \sin(t) + \sin c^2(t)$ şeklindedir. Modüle edilmiş işaretin frekans düzlemi gösterimini ve bandgenişliğini bulunuz.

3.3 Şekil P-3.3'de gösterilmiş olan iki işaret (a) ve (b) $c(t) = A\cos 2\pi f_0 t$ taşıyıcı işaretini modüle etmektedir. Modüle edilmiş işaretlerin grafiğini olabildiğince doğru şekilde zamanın bir fonksiyonu olarak çizin ve her iki durum için farkları ve benzerlikleri tartışınız.

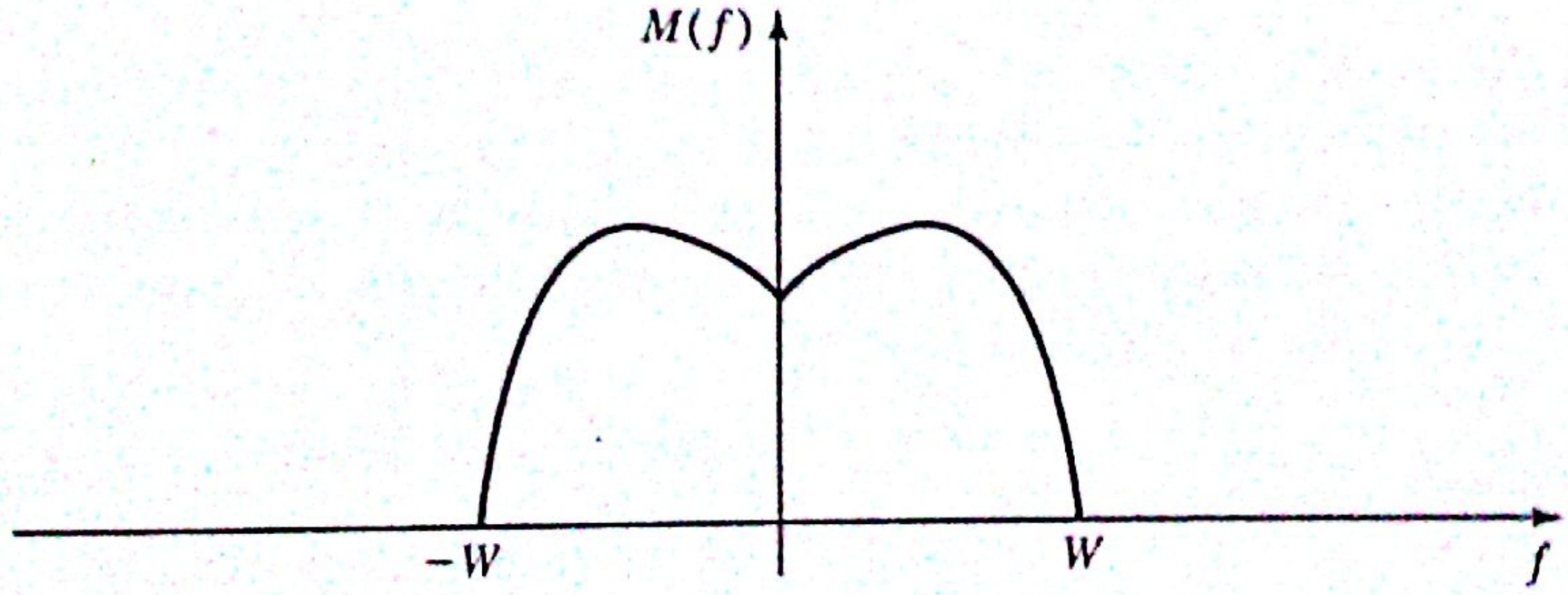


(a) (b)

Şekil P-3.3

3.4 $x(t) = m(t) + \cos 2\pi f_c t$ işaretinin çıkışı $y(t) = x(t) + \frac{1}{2}x^2(t)$ olan doğrusal olmayan bir sisteme uygulandığını varsayalım.

1. $M(f)$ Şekil P-3.4'de verilen bir işaret ve $W << f_c$ ise $y(t)$'i belirleyin ve tayfını çizin.



Şekil P-3.4

3.5 $m(t) = 2\cos 4000\pi t + 5\cos 6000\pi t$ modüle edici işaret $c(t) = 100\cos 2\pi f_c t$ taşıyıcı işareti ile çarpılıyor. Burada f_c=50 *kHz*. ÇYB işareti belirleyin ve tayfını çizin.

3.6 ÇYB modülasyonlu işaret $u(t) = Am(t)\cos 2\pi f_c t$ lokal taşıyıcı $x_L(t) = \cos(2\pi f_c t + \theta)$ ile karıştırılıyor (çarpılıyor) ve çıkış bandgenişliği mesaj işareti $m(t)$ bandgenişliğine denk bir AGS (Alçak Geçiren Süzgeç)'den geçiriliyor.

İşaretin alçak geçiren süzgeç çıkışındaki gücü P_{out} olarak gösterilmiştir. Modüle edilmiş işaretin gücü ise P_x dur. $\frac{P_{out}}{P_x}$ ifadesini $0 \le \theta \le \pi$ aralığında θnın bir fonksiyonu olarak çiziniz.

3.7 Bir GM işaret

$$u(t) = [20 + 2\cos 3000\pi t + 10\cos 6000\pi t]\cos 2\pi f_c t$$

formundadır ve burada $f_c = 10^5$ Hz'dir.

1. $u(t)$'in (gerilim) tayfını çiziniz.
2. Her bir frekans bileşeninin gücünü belirleyin.
3. Modülasyon indeksini belirleyin.
4. Yanbandların gücünü, toplam gücü ve yanband gücünün toplam güce oranını belirleyin.

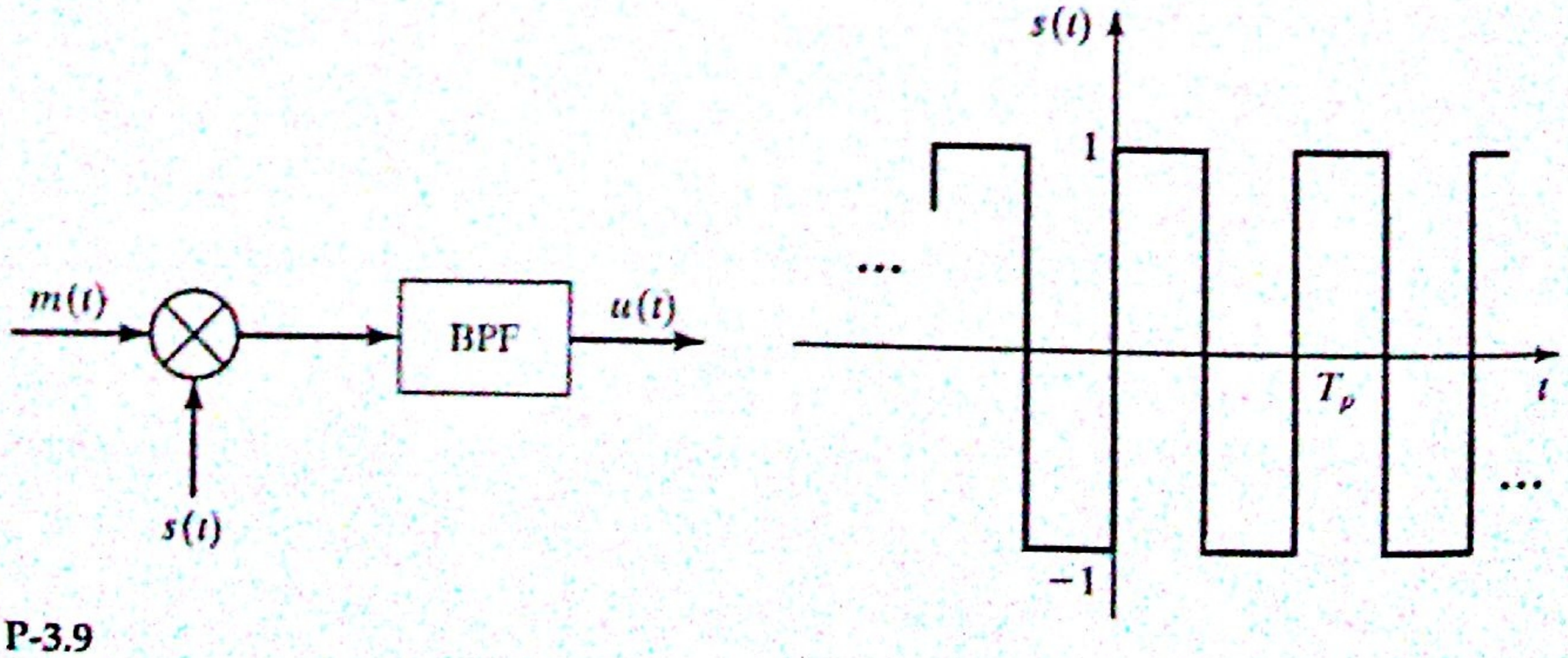
3.8 $m(t) = \cos 2000\pi t + 2\cos 4000\pi t$ şeklindeki bir mesaj işareti $f_c = 1$ Mhz olan $c(t) = 100\cos 2\pi f_c t$ şeklindeki bir taşıyıcı işareti ÇYB işaret $m(t)\,c(t)$ elde etmek için modüle etmektedir.

1. Üstyanband (UYB) işaretin ifadesini elde ediniz.
2. UYB işareti belirleyerek tayfını çiziniz.

3.9 ÇYB-TB işaret ilkin $m(t)$ mesaj işareti ile (Şekil P-3.6'da gösterilen) periyodik dikdörtgen dalgaformunun çarpılması ve sonra $1/T_p$ frekansına ayarlanmış, bandgenişliği $2W$ olan, burada W mesaj işaretinin bandgenişliğidir, bir bandgeçiren bir süzgeçten geçirilmesi ile üretilmektedir. BGS çıkışının, $u(t)$'in, istenen ÇYB-TB işaret olduğunu gösterin.

$$u(t) = m(t)\sin 2\pi f_c t$$

Burada $f_c = 1/T_p$

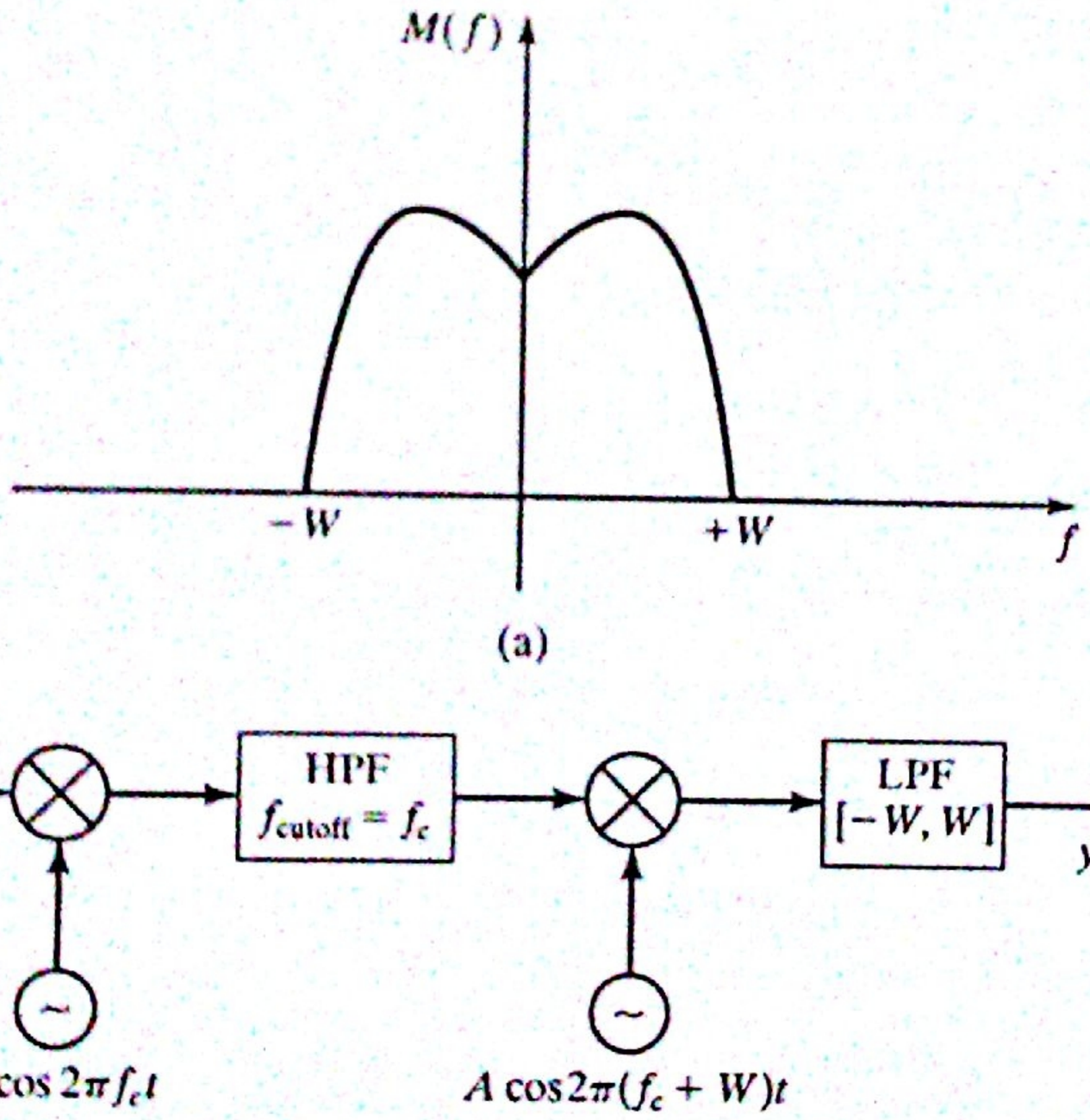


Şekil P-3.9

3.10 Problem 3.6 da ÇYB-TB işaret üretiminde kullanılan periyodik işaretin muhakkak dikdörtgen dalga formunda olması gerekmediğini gösterin. Bunun anlamı T_p periyoduna sahip herhangi bir işaretin Şekil P-3.9 da verilen dikdörtgen işaret yerine kullanılabileceğidir.

3.11 $m(t)$ mesaj işareti Şekil P-3.11(a) da gösterilen Fourier dönüşümüne sahiptir. Bu işaret Şekil P-3.11(b)'de gösterilen sisteme $y(t)$ işaretini üretmek için uygulanmaktadır.

1. $Y(f)$, $y(t)$ işaretinin Fourier dönüşümünü çizin.
2. $y(t)$ işareti iletildiğinde, Şekil P-3.11(b)'de gösterilen sistemin bir benzerinin $m(t)$'i yeniden elde etmek için alıcıda kullanılabileceğini gösterin. Bunun anlamı bu sistemin haberleşme güvenliğini artırmak için basit bir çırpıcı olarak kullanılabileceğidir.



Şekil P-3.11

3.12 ÇYB modülasyonlu işarette bandgeçiş işaretin zarfı mesaj işaretinin *mutlak değeri* ile orantılı olduğunu gösterin. Bunun anlamı, eğer mesaj işareti her zaman pozitif olan bir işaret ise, zarf detektörünün ÇYB demodülator olarak kullanılabileceğidir.

3.13 Bir GM işaret, $f_c = 800$ kHz olan bir taşıyıcının $m(t) = \sin 2000\pi t + 5\cos 4000\pi t$ işareti tarafından modüle edilmesi ile üretilmektedir.

GM işaret

$$u(t) = 100[1 + m(t)]\cos 2\pi f_c t$$

$50-\Omega$ yükü beslemektedir.

1. GM işaretin tayfını belirleyin ve çizin.
2. Taşıyıcı ve yanbandlardaki ortalama gücü belirleyin.
3. Modülasyon indeksi nedir?
4. Yüke aktarılan maksimum güç nedir?

3.14 Bir GM modülatörden elde edilen çıkış işareti

$$u(t) = 5\cos 1800\pi t + 20\cos 2000\pi t + 5\cos 2200\pi t.$$

ise

1. Modüle edici işaret $m(t)$ ve taşıyıcı $c(t)$'i bulunuz.
2. Modülasyon indeksini belirleyin.
3. Yanbandlardaki gücün taşıyıcıdaki güce oranını belirleyin.

3.15 Bir ÇYB-TB GM işaret

$$m(t) = 2\cos 2000\pi t + \cos 6000\pi t.$$

İşareti tarafından modüle edilmektedir. Modülasyonlu işaret

$$u(t) = 100m(t)\cos 2\pi f_c t,$$

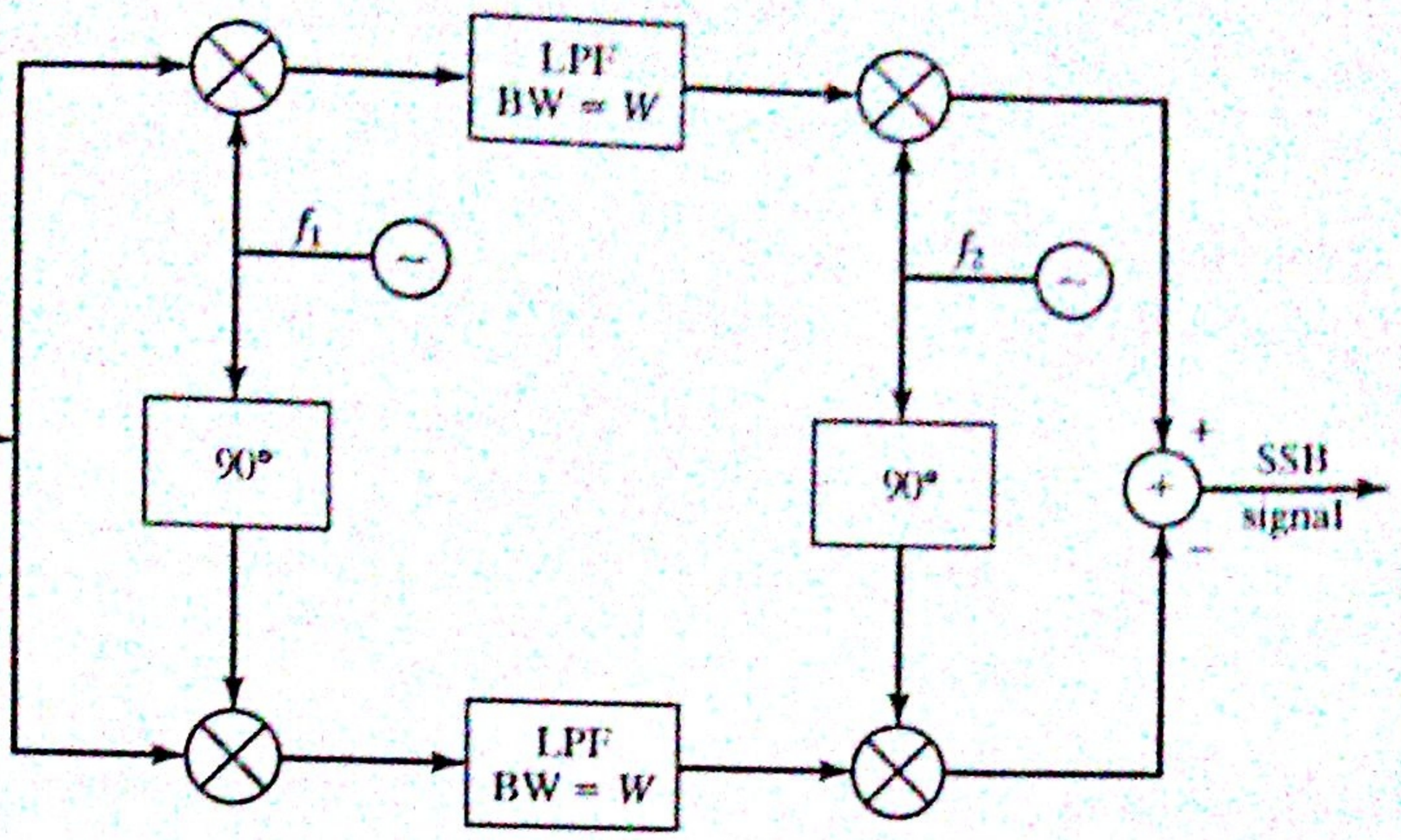
şeklinde verilmiştir. Burada fc=1 MHz'dir.

1. GM işaretin tayfını belirleyin ve çizin.
2. Frekans bileşenlerindeki ortalama gücü bulunuz.

3.16 Bir TYB-GM işaret 800kHz'lik bir taşıyıcı işaretin $m(t) = \cos 2000\pi t + 2\sin 2000\pi t$ işareti tarafından modüle edilmesi ile elde edilmektedir. Taşıyıcı genliği $A_c = 100$'dür.

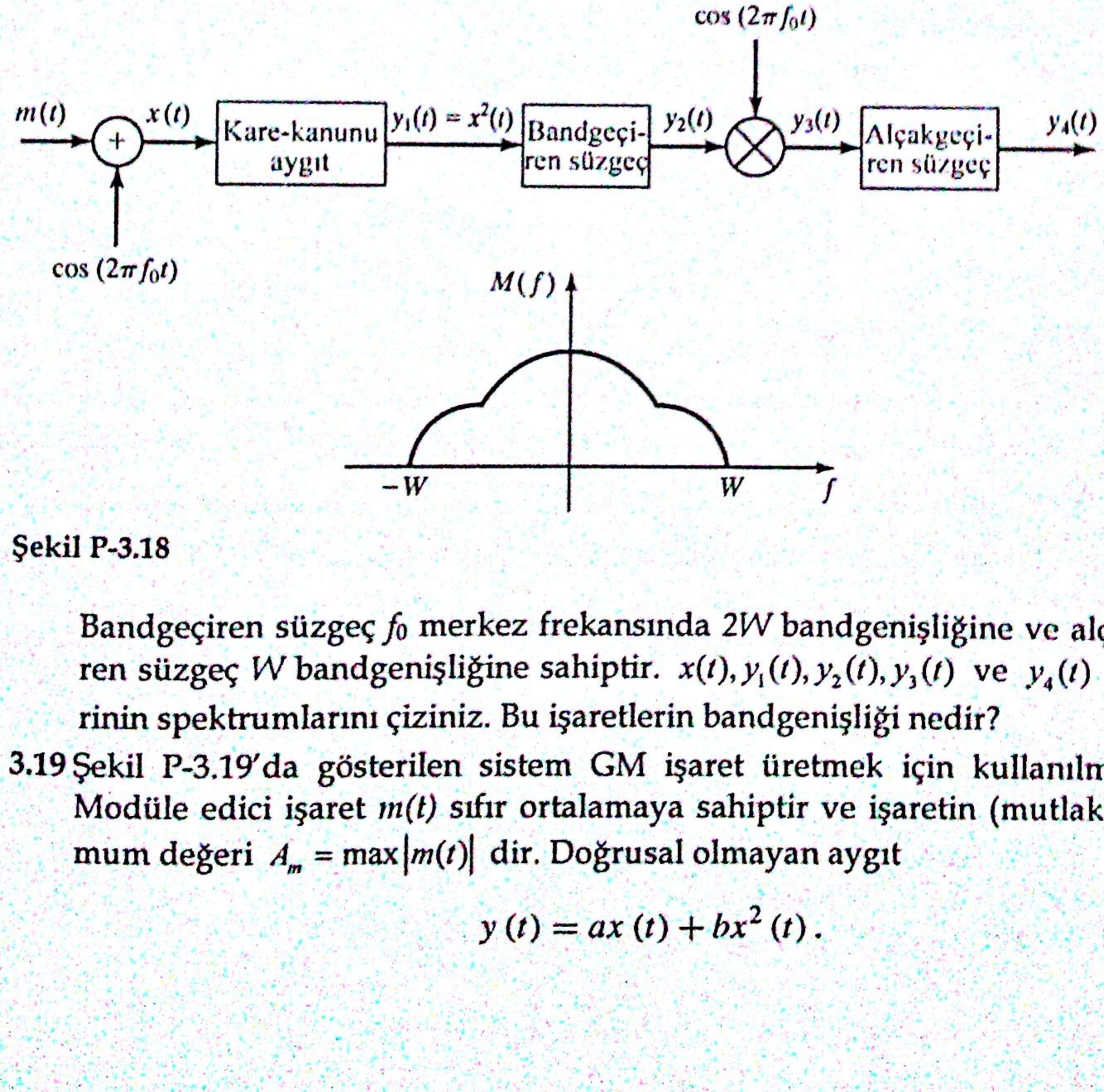
1. $\hat{m}(t)$ işaretini belirleyin.
2. TYB-GM işaretinin altyanbandı için (zaman-düzlemi) ifadesini belirleyin.
3. Alt band TYB işaretin genlik tayfını belirleyin.

3.17 Şekil P-3.17'de Weaver'in TYB modülatörü gösterilmektedir. Giriş işaretini $m(t) = \cos 2\pi f_m t$ şeklinde alarak (burada $f_m < W$) f_1 ve f_2 değerlerinin uygun seçilmesi halinde çıkışın TYB işaret olduğunu gösterin.



Şekil P-3.17

3.18 Tayfı P-3.18'de gösterilen mesaj işareti $m(t)$ aşağıda şekilde gösterilen sistemden geçirilmektedir.



Şekil P-3.18

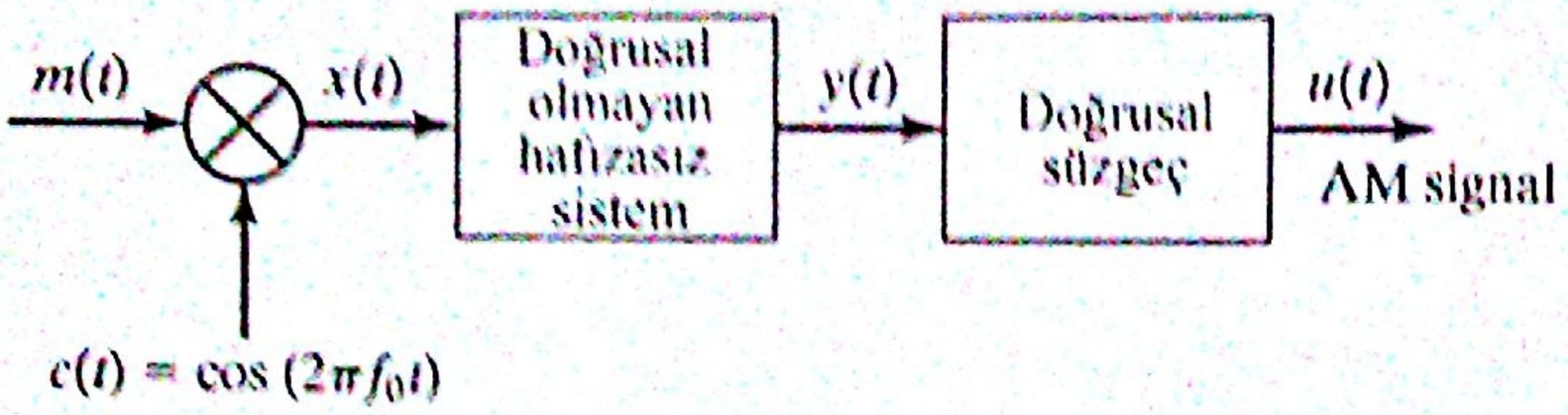
Bandgeçiren süzgeç f_0 merkez frekansında $2W$ bandgenişliğine ve alçak geçiren süzgeç W bandgenişliğine sahiptir. $x(t), y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ ve $y_4(t)$ işaretlerinin spektrumlarını çiziniz. Bu işaretlerin bandgenişliği nedir?

3.19 Şekil P-3.19'da gösterilen sistem GM işaret üretmek için kullanılmaktadır. Modüle edici işaret $m(t)$ sıfır ortalamaya sahiptir ve işaretin (mutlak) maksimum değeri $A_m = \max|m(t)|$ dir. Doğrusal olmayan aygıt

$$y(t) = ax(t) + bx^2(t).$$

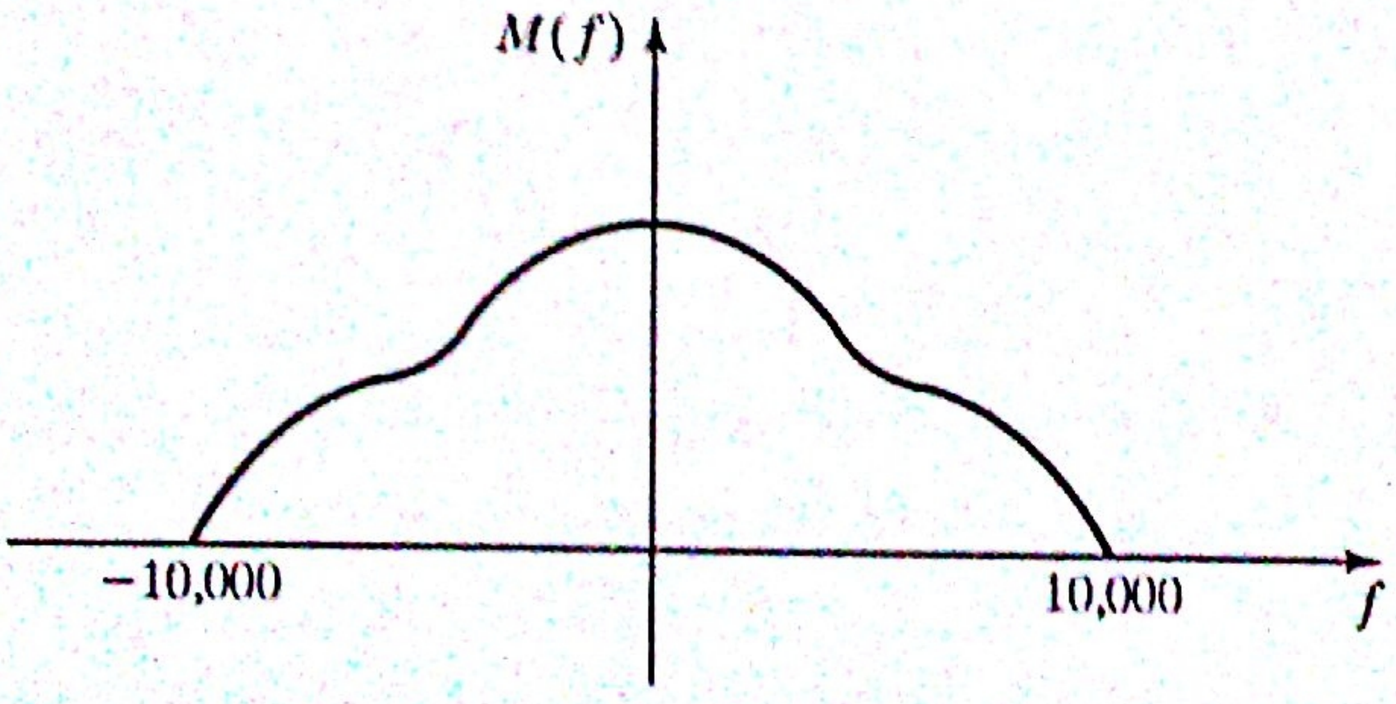
şeklinde bir giriş-çıkış karakteristiğine sahiptir.

1. $y(t)$ işaretini modüle edici işaret $m(t)$ ve taşıyıcı işaret $c(t)$ cinsinden ifade edin.
2. Modülasyon indeksi nedir?
3. Çıkışında bir GM işaret üreten süzgeç karakteristiğini belirleyin.



Şekil P-3.19

3.20 Fourier dönüşümü $M(f)$ Şekil P-3.20'de gösterilen $m(t)$ işareti A noktasından B noktasına iletilmektedir. İşaretin normalize edildiği yani $-1 \le m(t) \le 1$ olduğu bilindiğine göre

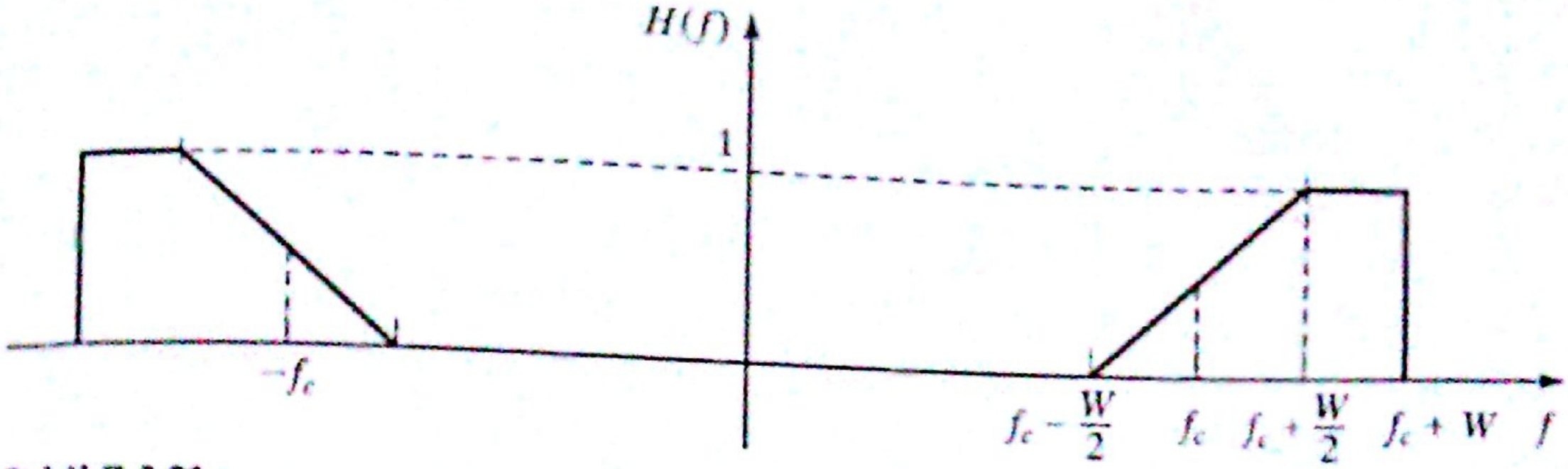


Şekil P-3.20

1. İletimde ATYB kullanılır ise modüle edilmiş işaretin bandgenişliği nedir?
2. İletimde ÇYB kullanıldığında modüle edilmiş işaretin bandgenişliği nedir?
3. $\alpha = 0.8$ ile bir GM modülasyon yöntemi kullanıldığında modüle edilmiş işaretin bandgenişliği nedir?

3.21 Bir artık yanband sistem Şekil P-3.21'de gösterilmektedir. Mesaj işareti $m(t)$'in nin bandgenişliği W ve bandgeçiren süzgecin transfer fonksiyonu şekilde gösterilmektedir.

1. Bandgeçiren süzgecin dürtü tepkisi $h(t)$ ile gösterilir ise $h(t)$'in alçak geçiş dengi olan $h_l(t)$'i belirleyin.
2. Modüle edilmiş işaret $u(t)$'in ifadesini belirleyin.



Şekil P-3.21

3.22 ÇYB, TYB, geleneksel GM, UTYB ve ATYB işaretleri için aynı fazda ve dik bileşenler $x_c(t)$ ve $x_s(t)$ ile zarf ve genlik ifadelerini bulunuz.

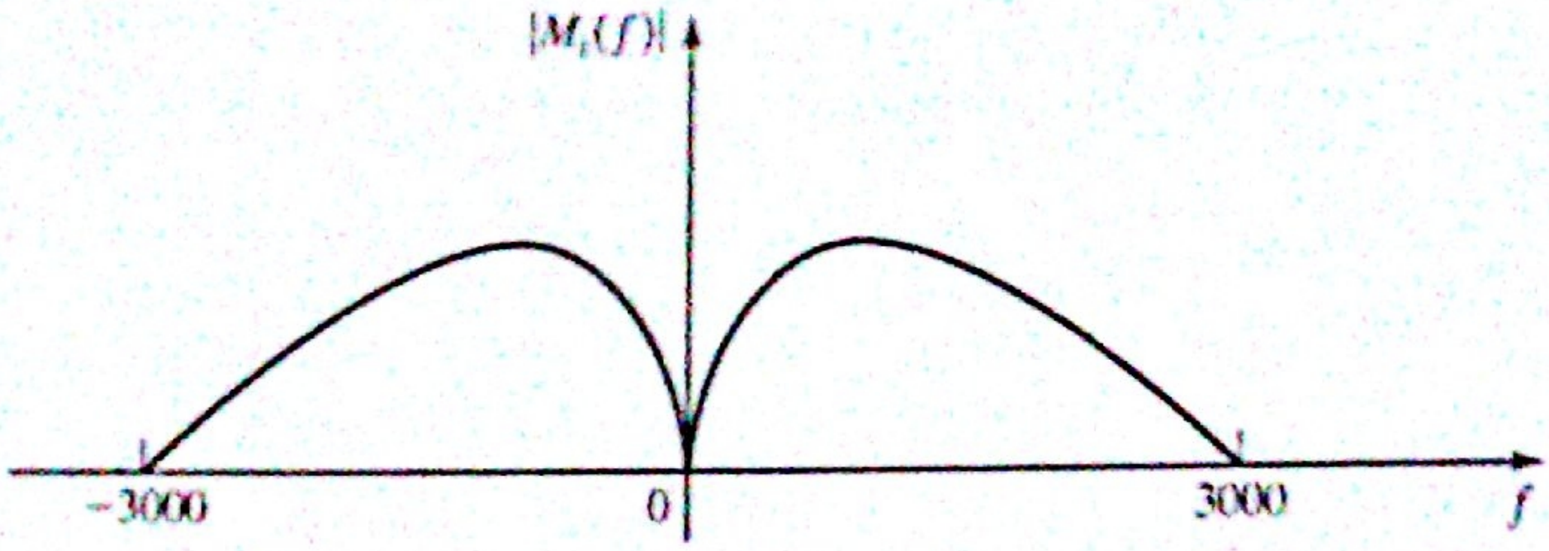
3.23 Normalize işaret $m_n(t)$ 10,000 Hz bandgenişliğine sahiptir ve güç içeriği 0.5 wattır. $A\cos 2\pi f_0 t$ taşıyıcı işaret 200 watt güç içeriğine sahiptir.

1. Eğer $m_n(t)$ taşıyıcıyı TYB genlik modülasyonu ile modüle eder ise modüle edilmiş işaretin bandgenişliği ve güç içeriği ne olur?
2. Eğer modülasyon yöntemi ÇYB TB ise 1. sorunun cevabı ne olur?
3. Eğer modülasyon yöntemi modülasyon indeksi 0.6 olan bir GM ise 1. Sorunun cevabı ne olur?

3.24 60 ses band işareti TYB (üstyanband) modülasyonu ve frekans bölmeli çoğullama (FBÇ) kullanılarak iletilmek istenmektedir. Her bir 60 işaret Şekil P-3.24'de gösterilen spektruma sahiptir. Ses bandı işaretlerin 3 kHz band sınırlı olduğuna dikkat edin. Eğer her bir işaret ayrı bir frekans ötelemesine tabi tutulur ise frekans bölmeli çoğullama yapabilmek için 60 farklı taşıyıcı frekansı üreten bir frekans sentezleyicisine ihtiyacımız olacaktır. Diğer taraftan, eğer kanal $LK = 60$ olacak şekilde K alt kanala sahip L gruba bölünür ise, bu durumda senzetleyicinin üretmesi gereken frekans sayısı $L+K$ olur.

1. K altkanalın olduğu bir grup için TYB işaretlerin tayfını gösteriniz. 1 kHz koruma bandının ardışık altkanalların birbirinden ayrıldığını ve taşıyıcı frekanslarının f_{c1}=*10 kHz*, f_{c2}=*14 kHz... şeklinde* olduğunu varsayalım.
2. LK=60 ve $L+K$ minimum olacak şekilde K ve L değerlerini belirleyin.

3. 60 FBÇ işaret 300 kHz-540 kHz frekans bandını ve her bir K işaret grubu 10 kHz'den (10+4K) kHz'e kadar frekans bandını işgal edecek şekilde taşıyıcı frekanslarını belirleyin.



Şekil P-3.24

BİLGİSAYAR PROBLEMLERİ

3.1 Çift yanband (ÇYB) GM

Mesaj işareti $m(t)$

$$m(t) = \begin{cases} \text{sinc}\,(100t), & 0 \le t \le t_0 \\ 0, \end{cases},$$

şeklinde verilmiştir. Burada $t_0 = 0.1$. Bu mesaj işareti, ÇYB GM işareti, $u(t)$, üretmek için $c(t) = \cos 2\pi f_c t$ taşıyıcı işaretini modüle etmektedir. Burada f_c=250 Hz'dir.

1. Örnekleme aralığını $t_s = 0.0001$ seçerek, $0 \le t \le t_0$ aralığında $m(t)$ ve $u(t)$ işaretlerini örnekleyin ve çiziniz.
2. $m(t)$ ve $u(t)$ işaretlerinin spektrumlarını belirleyin ve çizin.
3. Yukarıdaki 1. ve 2. maddelerini $t_0 = 0.4$ alarak tekrarlayın ve $t_0 = 0.1$ ve $t_0 = 0.4$ arasındaki fark üzerinde yorum yapınız.

3.2. Geleneksel GM

Problem CP-3.1 de verilmiş olan mesaj işareti $m(t)$ geleneksel GM yöntemi ile $c(t) = \cos 2\pi f_c t$ taşıyıcı işareti modüle etmektedir. Taşıyıcı frekansı f_c=250 Hz ve modülasyon indeksi $a = 0.80$ dir.

1. $m(t)$ mesaj işaretini ve modüle edilmiş işaret $u(t)$'i $t_s = 0.0001$ örnekleme aralığı ile çizin.
2. Mesaj işareti $m(t)$ ve modüle edilmiş işaret $u(t)$ spektrumlarını belirleyin ve çizin.
3. Yukarıdaki 1. ve 2. Maddeleri $t_0 = 0.4$ alarak tekrarlayın ve $t_0 = 0.1$ ve $t_0 = 0.4$ arasındaki fark üzerinde yorum yapınız.

3.3 Tek yanband GM

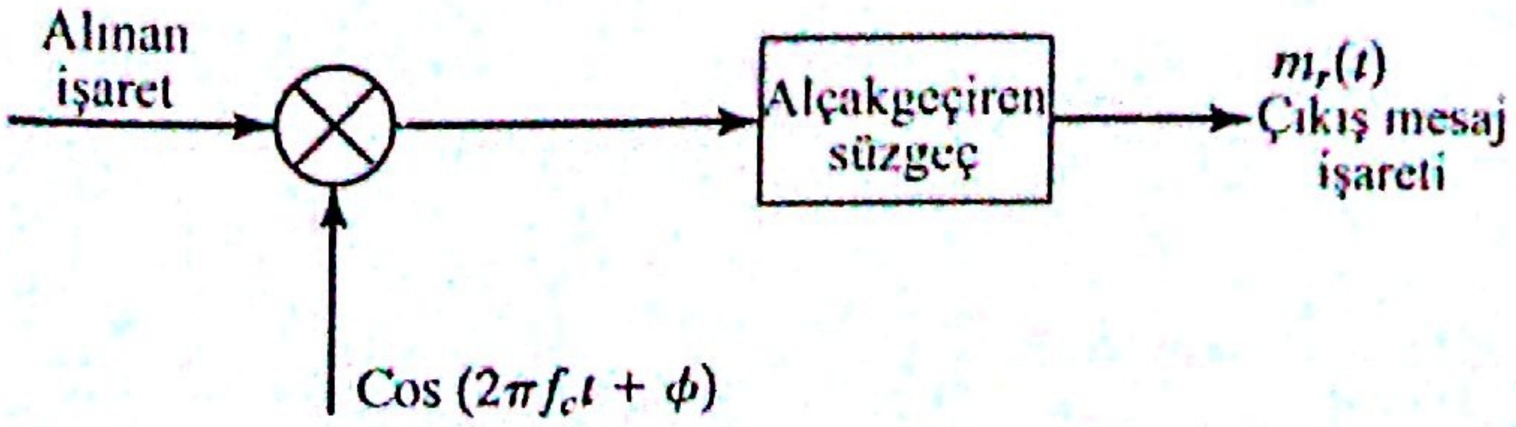
Problem CP-3.1 de verilmiş olan mesaj işareti $m(t)$ alt TYB işaret, $u(t)$ üretmek için $c(t) = \cos 2\pi f_c t$ taşıyıcı işareti modüle etmektedir. Taşıyıcı frekansı f_c=250 Hz'dir.

1. $m(t)$ mesaj işaretini, bu işaretin Hilbert dönüşümü $\hat{m}(t)$ ve modüle edilmiş ATYB işaret $u(t)$'i çizin.
2. Mesaj işareti $m(t)$ ve modüle edilmiş ATYB işaret $u(t)$ spektrumlarını belirleyin ve çizin.
3. Yukarıdaki 1. ve 2. Maddeleri $t_0 = 0.4$ alarak tekrarlayın ve $t_0 = 0.1$ ve $t_0 = 0.4$ arasındaki fark üzerinde yorum yapınız.

3.4 ÇYB-GM İşaretin Demodülasyonu

Problem CP-3.1 de verilmiş olan mesaj işareti $m(t)$ taşıyıcı işareti $c(t) = \cos 2\pi f_c t$ modüle etmekte ve ÇYB-GM işaret $u(t) = m(t)c(t)$ üretilmektedir. Taşıyıcı frekansı f_c=250 Hz ve $t_0 = 0.4$ dir.

1. Örnekleme aralığı $t_s = 0.0001$ seçerek mesaj işareti $m(t)$ ve modülasyonlu işaret $u(t)$ için 1000 örnek oluşturun ve her iki işareti çizin.
2. 1. Adımda üretilen örneklenmiş ÇYB-GM işareti, $u(t_s)$ Şekil ÇP-3.4 de gösterilen demodülator kullanılarak demodüle edin. $\phi = 0, \pi/8, \pi/4$ ve $\pi/2$ değerleri içini demodülasyonu gerçekleştirin ve alınan işaret $m_r(t)$'i çizin. Kullanılan alçak geçiren süzgeç doğrusal faz FIR süzgeçtir ve 31. derece, 100 Hz kesme frekansı (-3dB) ve en az 30 dB durdurma bandı zayıflatmasına sahiptir.
3. 2. Adımda elde edilen sonuçları yorumlayın.
4. $2f_c$ noktasındaki frekans bileşenlerini zaman düzleminde alçak geçiren süzgeç kullanarak yok etmek yerine, karıştırıcının çıkışındaki 1000 örneğin Ayrık Fourier Dönüşümünü (AFD) hesaplayıp, $2f_c$ noktasındaki frekans bileşenlerini sıfırlayın ve daha sonra ters AFD uygulayarak zaman düzlemi işareti elde edin. Frekans düzlemi süzgeçlemesi ile 2. Adımdaki zaman düzlemi süzgeçlemesi sonuçlarını karşılaştırın.



Şekil CP-3.4 ÇYB-TB GM işaretin demodülasyonu

3.5 TYB GM işaretin demodulu

Problem CP-3.1 de verilmiş olan mesaj işareti $m(t)$ taşıyıcı işareti $c(t) = \cos 2\pi f_c t$ modüle etmekte ve TYB işaret $u(t)$ üretilmektedir. Taşıyıcı frekansı f_c=250 Hz ve $t_0 = 0.4$ dir.

1. Örnekleme aralığı $t_s = 0.0001$ seçerek mesaj işareti bu işaretin Hilbert dönüşümü $\hat{m}(t)$ ve modüle edilmiş ATYB işaret $u(t)$'i üretin. Bu üç işareti çizin.
2. 1. adımda üretilen örneklenmiş ATYB işareti, $u(t)$ Şekil ÇP-3.4 de gösterilen demodülator kullanılarak demodüle edin. $\phi = 0, \pi/8, \pi/4$ ve $\pi/2$ değerleri içini demodülasyonu gerçekleştirin ve alınan işaret $m_r(t)$'i çizin. Kullanılan alçak geçiren süzgecin karakteristiği CP-3.4 Probleminde 2. adımda verilmiştir.
3. 2. adımda elde edilen sonuçları yorumlayın.
4. 2. adımda uygulanan zaman düzlemi süzgeçleme yerine, Problem CP-3.4'de 4. adımda açıklandığı gibi $2f_c$ noktasındaki frekans bileşenlerini AFT kullanarak frekans düzleminde süzgeçleyin Frekans düzlemi süzgeçlemesini gerçekleştirerek demodülasyon sonucunda elde edilen işareti, zaman düzlemi süzgeçlemesi ile elde edilen işaret ile kıyaslayın.

3.6 Geleneksel GM işaretin Demodülasyonu

Problem CP-3.1 de verilmiş olan mesaj işareti $m(t)$ geleneksel GM işareti üretmek için $c(t) = \cos 2\pi f_c t$ taşıyıcı işaretini modüle etmektedir. Taşıyıcı frekansı f_c=250 Hz ve modülasyon indeksi $a = 0.80$ dir.

1. Örnekleme aralığı $t_s = 0.0001$ seçerek mesaj işareti $m(t)$ ve modülasyonlu işaret $u(t)$ için 1000 örnek oluşturun ve her iki işareti çizin.
2. 1. adımda üretilen örneklenmiş geleneksel GM işaret $u(t)$'i işaretin zarfını hesaplayarak demodüle edin. Yani

$$e(t) = \sqrt{[1 + am(t)]^2} = |1 + am(t)|$$

şeklinde zarfı hesaplayıp ve demolüle edilmiş işaret $m_r(t)$'i elde etmek için DC terimi çıkartın. Alınan mesaj işareti $m_r(t)$'i çizin.
3. 2. adımda elde edilen sonuçları yorumlayın.

4

Açı Modülasyonu

Bölüm 3'de bilgi işaretinin iletim aracı olarak bir taşıyıcının genlik modülasyonunu ele aldık. Geleneksel GM gerçek anlamda tam doğrusal olmasa da genlik modülasyon yöntemleri doğrusal (lineer) modülasyon yöntemleri olarak bilinir.

Modülasyon yöntemlerinin bu bölümde ele alınacak bir başka sınıfı ise, frekans ve faz modülasyonunu içerir. Frekans modülasyon (FM) sistemlerinde, taşıyıcı frekans f_c bilgi işaretine göre değişim gösterirken, faz modülasyon (FzM) sistemlerinde mesaj işaretindeki değişimlere paralel olarak taşıyıcının fazı değiştirilir. Frekans ve faz modülasyonu doğrusal değildir ve bu ikili genellikle *açı modülasyonu* olarak adlandırılır. Aşağıdaki altbölümlerde açı modülasyonunun, doğası gereği aşırı doğrusal olmama nedeni ile uyarlanması daha karmalık ve analizi çok daha güç olduğunu göstereceğiz. Birçok uygulamada, sadece yaklaşık bir analiz yapılabilir. Açı modülasyonunun bir başka özelliği de bandgenişliğinin artmasıdır. Frekans ve faz modülasyon sistemlerinde genellikle bandgenişliği o kadar artar ki sonuçta elde edilen modülasyonlu işaretin bandgenişliği bilgi işaretinin bandgenişliğinin katları şeklinde ifade edilir.[1] Doğal olarak, artan uyarlama karmaşıklığı ve daha fazla bandgenişliği kapsıyor olmasından dolayı bu sistemlerin faydası sorgulanabilir. Bölüm 6'da gerçekleştireceğimiz analiz sonuçlarının göstereceği gibi bu sistemlerin sunduğu en büyük fayda gürültüye karşı bağışıklılıktır. Aslında bu sistemler bandgenişliğinden fedakarlık ederek yüksek gürültü bağışıklılığı sunarlar. FM sistemlerin yüksek kalite müzik yayını için ve verici gücün oldukça kısıtlı olduğu noktadan-noktaya haberleşme sistemlerinde yaygın kullanımının nedeni budur. Açı modülasyonlu işaretlerin sahip olduğu bir başka avantaj ise sabit zarfa sahip olmalarıdır. Bu özellikle doğrusal olmayan kuvvetlendiricilerin kullanımı sözkonusu ise fayda sağlar.

---

[1] *Kelimenin tam anlamı ile aslında modüle edilmiş işaretin bandgenişliği sonsuzdur. Aslında etkin bandgenişliğinden söz edilmesinin nedeni de budur.*

4.1 FM VE FzM İŞARETLERİN GÖSTERİMİ

Bir genlik modülasyonlu işaret

$$u(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \tag{4.1.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada f_c taşıyıcı frekansı ve $\phi(t)$ zamanla değişim gösteren fazı ifade eder. İşaretin ani frekansı

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\phi(t) \tag{4.1.2}$$

olarak verilir. Eğer $m(t)$ bilgi işareti ise, bu durumda bir FzM sistemde faz mesaj işaretine

$$\phi(t) = k_p m(t) \tag{4.1.3}$$

şeklinde bağımlılık gösterir. Bir FM sistemde ise, taşıyıcı frekans değerinden ani frekans kaymaları, mesaj işareti ile orantılıdır ve

$$f_i(t) - f_c = k_f m(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\phi(t) \tag{4.1.4}$$

şeklinde verilir. Burada k_p ve k_f faz ve frekans *kayma sabitleridir*. Yukarıda verilen ilişkilerden hareket ile

$$\phi(t) = \begin{cases} k_p m(t) & \text{FzM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau & \text{FM} \end{cases} \tag{4.1.5}$$

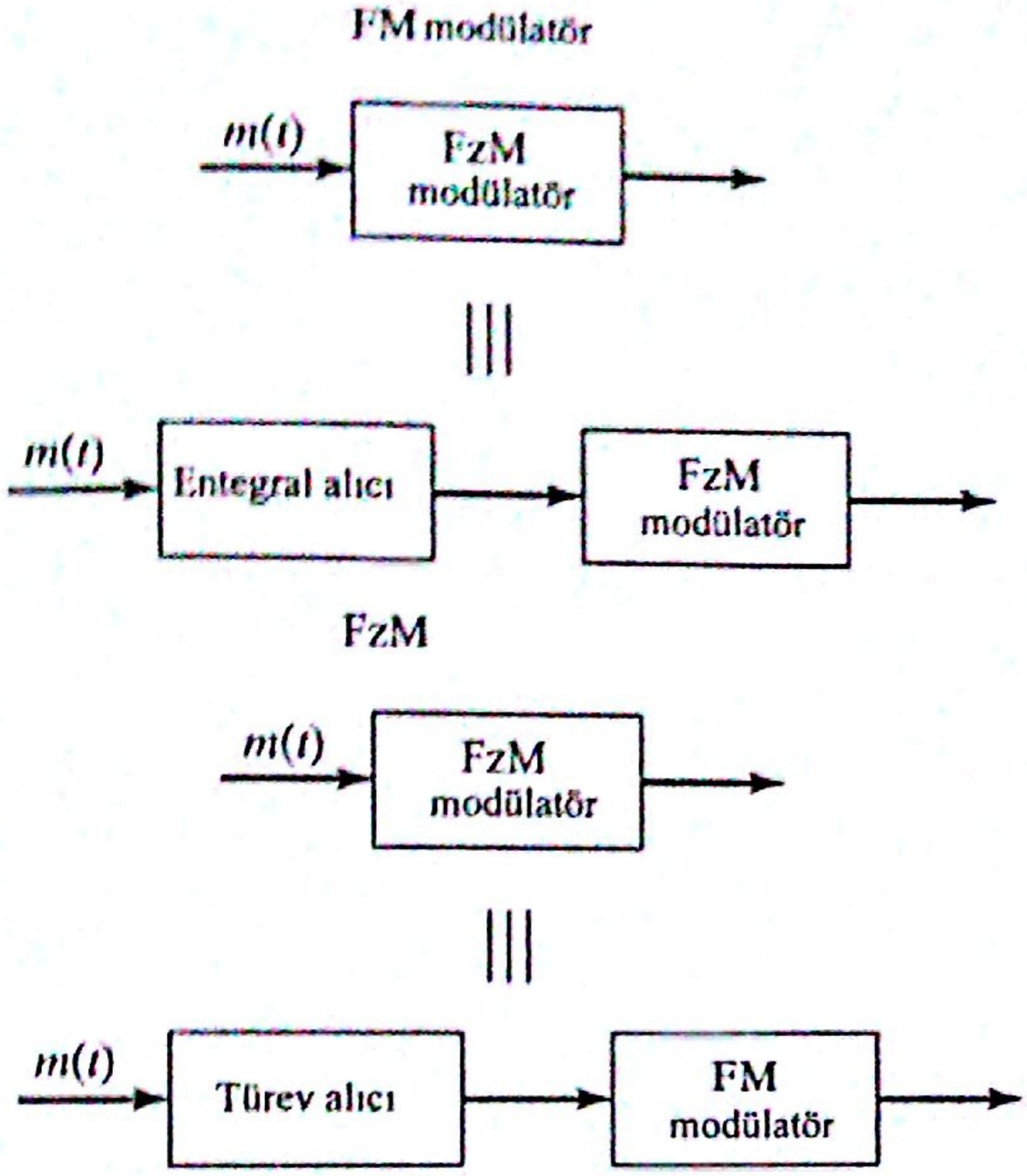
yazılabilir. Yukarıdaki ifade FM ve FzM sistemler arasında yakın ve ilginç bir ilişkiyi göstermektedir. Bu yakın ilişki bu sistemleri paralel bir şekilde analiz etme imkanı verir ve bu sistemlerin arasındaki temel farklılığa işaret eder. İlk olarak, eğer mesaj işaretinin entegrali ile taşıyıcı işaret üzerinde faz modülasyonu yapar isek bu tam olarak taşıyıcı işaretin frekans modülasyonuna karşılık gelir. Diğer taraftan, bu ilişki

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \begin{cases} k_p \frac{d}{dt}m(t) & \text{FzM} \\ 2\pi k_f m(t) & \text{FM} \end{cases} \tag{4.1.6}$$

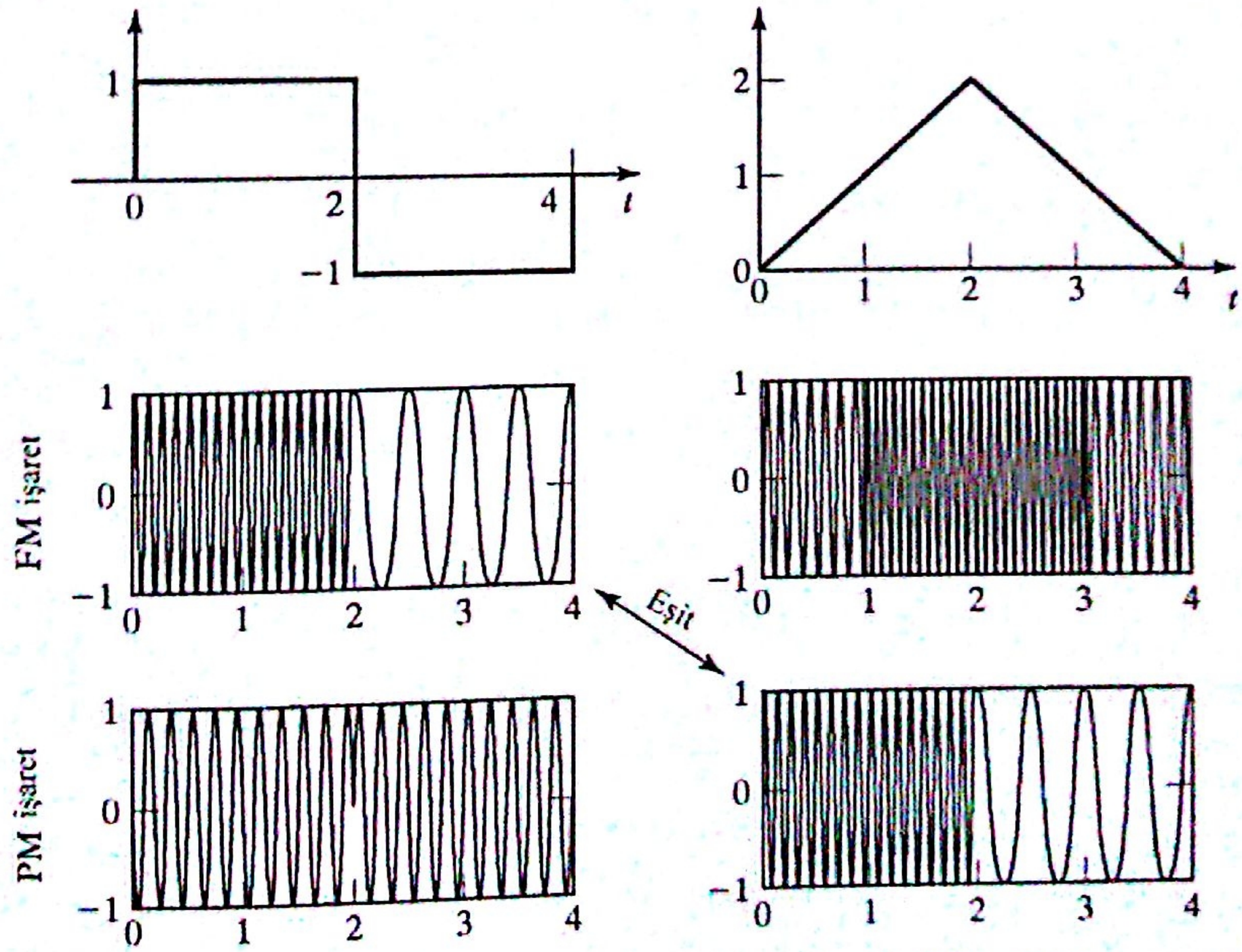
şeklinde de ifade edilebilir ki bu ifade mesaj işaretinin türevi ile frekans modülasyonu yapıldığında bu işlemin taşıyıcı işaretin faz modülasyonuna karşılık geldiğini gösterir. Şekil 4.1 FM ve FzM arasındaki bu ilişkiyi göstermektedir. Şekil 4.2 bir kare-darbe işaretini ve entegrali olan testere-dişi işareti ve bunlara karşılık gelen FM ve FzM işaretleri göstermektedir.

FM işaretin demodülasyonu, modülasyonlu işaretin ani frekansının bulunma ve ani frekanstan taşıyıcı işaretin çıkarılma süreçlerini içerir. FzM demodülasyonunda ise, demodülasyon süreci işaretin fazının bulunması ve buradan $m(t)$'in elde edilmesi ile gerçekleştirilir. Bir FzM sistemde maksimum faz kayması

$$\Delta\phi_{max} = k_p \max[|m(t)|] \tag{4.1.7}$$



Şekil 4.1. Faz ve frekans modülatörlerinin kıyaslanması



Şekil 4.2 Kare ve testere dişi dalgaların frekans ve faz modülasyonu

ve bir FM sistemde maksimum frekans sapması;

$$\Delta f_{max} = k_f \max[|m(t)|] \tag{4.1.8}$$

şeklinde verilir.

Örnek 4.1.1

Bilgi işareti

$$m(t) = a\cos(2\pi f_m t)$$

$A_c \cos(2\pi f_c t)$ taşıyıcısının, frekans veya faz modülasyonu için kullanılmaktadır. Her iki durumda da modülasyonlu işareti belirleyiniz.

Çözüm FzM için

$$\phi(t) = k_p m(t) = k_p a\cos(2\pi f_m t) \tag{4.1.9}$$

ve FM için

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\,d\tau = \frac{k_f a}{f_m}\sin(2\pi f_m t) \tag{4.1.10}$$

elde edilir. Dolayısı ile modüle edilmiş işaretler

$$u(t) = \begin{cases} A_c \cos\left(2\pi f_c t + k_p a\cos(2\pi f_m t)\right) & \text{FzM} \\ A_c \cos\left(2\pi f_c t + \frac{k_f a}{f_m}\sin(2\pi f_m t)\right) & \text{FM} \end{cases} \tag{4.1.11}$$

olacaktır.

$$\beta_p = k_p a \tag{4.1.12}$$

ve

$$\beta_f = \frac{k_f a}{f_m} \tag{4.1.13}$$

tanımlamaları yapılır ise

$$u(t) = \begin{cases} A_c \cos\left(2\pi f_c t + \beta_p \cos(2\pi f_m t)\right) & \text{FzM} \\ A_c \cos\left(2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)\right) & \text{FM} \end{cases} \tag{4.1.14}$$

elde edilir. Burada β_p ve β_f parametreleri sırası ile FzM ve FM sistemlerin *modülasyon indeksi* olarak adlandırılır.

Modülasyon indeks tanımları sinüzoidal olmayan işaretleri de kapsayacak şekilde

$$\beta_p = k_p \max[|m(t)|] \tag{4.1.15}$$

$$\beta_f = \frac{k_f \max[|m(t)|]}{W} \tag{4.1.16}$$

olarak genişletilebilir. Burada W, mesaj işareti $m(t)$'in bandgenişliğini ifade eder. Maksimum faz ve frekans sapması $\Delta\phi_{max}$ ve Δf_{max} cinsinden

$$\beta_p = \Delta\phi_{max} \tag{4.1.17}$$

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{max}}{W} \tag{4.1.18}$$

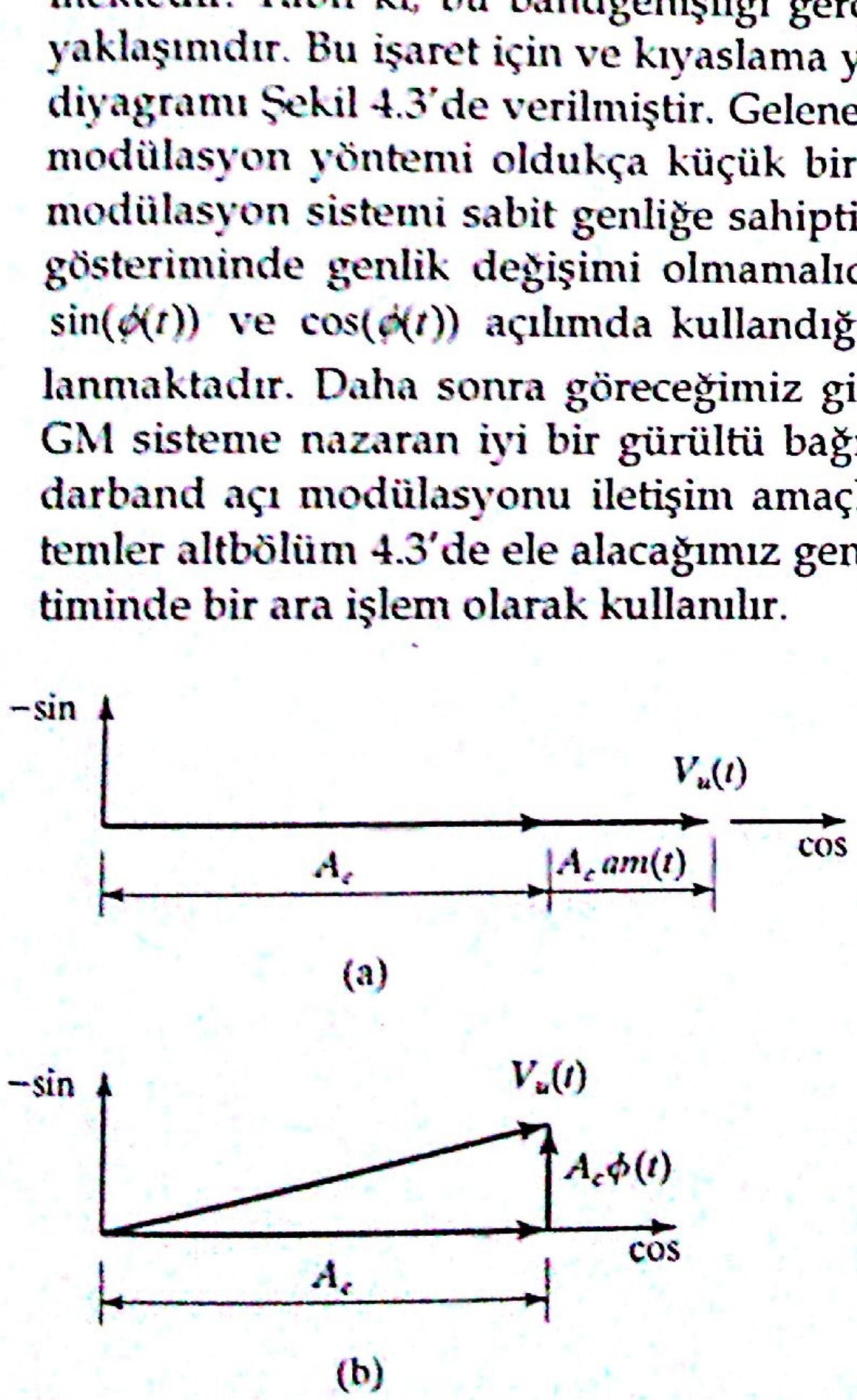
şeklinde eşitlikler elde edilir.

Darband Açı Modülasyonu[2]

k_p ve k_f sapma sabitleri ile $m(t)$ mesaj işareti tüm t değerleri için $\phi(t) << 1$ olacak şekilde seçilmiş olan bir açı modülasyon sistemini ele alalım. Bu durumda Denklem 4.1.1'de verilen $u(t)$ açılımını elde etmek için

$$\begin{aligned} u(t) &= A_c \cos 2\pi f_c t \cos\phi(t) - A_c \sin 2\pi f_c t \sin\phi(t) \\ &\approx A_c \cos 2\pi f_c t - A_c \phi(t) \sin 2\pi f_c t, \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

şeklinde basit bir yaklaşım kullanılabilir. Burada $\phi(t) << 1$ için $\cos\phi(t) \approx 1$ ve $\sin\phi(t) \approx \phi(t)$ yaklaşımları kullanılmıştır. Bu durumda Denklem (4.1.9) modüle edilmiş işaretin, denklem (3.2.5)'de verilen geleneksel GM işarete oldukça benzer olduğunu göstermektedir. Tek fark mesaj işareti m(t)'in kosinüs taşıyıcıyı değil de sinüs taşıyıcıyı modüle ediyor olmasıdır. İşaretin bandgenişliği, mesaj işaretinin bandgenişliğinin iki katına eşit olan geleneksel GM işaret bandgenişliğine benzemektedir. Tabii ki, bu bandgenişliği gerçek FM işaret bandgenişliğine sadece bir yaklaşımdır. Bu işaret için ve kıyaslama yapılan geleneksel GM işaret için bir fazör diyagramı Şekil 4.3'de verilmiştir. Geleneksel GM ile kıyaslandığında, darband açı modülasyon yöntemi oldukça küçük bir genlik değişimine sahiptir. Aslında açı modülasyon sistemi sabit genliğe sahiptir ve dolayısı ile sistemin fazör diyagram gösteriminde genlik değişimi olmamalıdır. Ancak bu küçük genlik değişimleri, $\sin(\phi(t))$ ve $\cos(\phi(t))$ açılımda kullandığımız birinci derece yaklaşımdan kaynaklanmaktadır. Daha sonra göreceğimiz gibi, darband açı modülasyonu geleneksel GM sisteme nazaran iyi bir gürültü bağışıklılığı sunmamaktadır. Bundan dolayı, darband açı modülasyonu iletişim amaçlı olarak pek az kullanılır. Ancak bu sistemler altbölüm 4.3'de ele alacağımız geniş band açı modülasyonlu işaretlerin üretiminde bir ara işlem olarak kullanılır.



Şekil 4.3 Geleneksel GM için ve darband açı modülasyonu için fazör diyagram gösterimi

[2] *Düşük-indeks açı modülasyonu olarak da bilinir*

4.2 AÇI MODÜLASYONLU İŞARETLERİN SPEKTRAL KARAKTERİSTİKLERİ

Açı modülasyonlu işaretlerin doğasında mevcut olan doğrusal olmama özelliğinden dolayı, en basit mesaj işaretleri için dahi, spektral özelliklerinin kesin karakteristiklerini matematiksel olarak izleyebilmek oldukça zordur. Bundan dolayı bu işaretlerin spektral karakteristiklerinin elde edilmesi basit modüle edici işaretlerin incelenmesi ve belirli yaklaşımlar ile mümkündür. Daha sonra elde edilen sonuçlar daha kompleks mesaj işaretleri için genelleştirilir. modüle edici mesaj işareti bir sinüzoidal iken açı modülasyonlu işaretlerin spektral karakteristiklerini inceleyeceğiz.

4.2.1. Sinüzoidal İşaret ile Açı Modülasyonu

Mesaj işaretinin bir sinüzoidal (daha doğrusu FzM için bir sinüs, FM için bir kosinüs) olduğu durumu ele alalım. Örnek 4.1.1'de gördüğümüz gibi, bu durumda FM ve FzM için

$$u(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin 2\pi f_m t) \tag{4.2.1}$$

elde edilir. Burada β modülasyon indeksidir ve β_p veya β_f olabilir. Ve FzM için $\sin 2\pi f_m t$ yerine $\cos 2\pi f_m t$ yazılmalıdır. Euler eşitliğini kullanarak, modülasyonlu işaret

$$u(t) = \mathrm{Re}\left(A_c e^{j2\pi f_c t} e^{j\beta \sin 2\pi f_m t}\right) \tag{4.2.2}$$

şeklinde yazılabilir. $\sin 2\pi f_m t$. $T_m = \frac{1}{f_m}$ periyoduna sahip periyodik bir işaret olduğundan, kompleks üstel fonksiyon

$$e^{j\beta \sin 2\pi f_m t}$$

de aynı periyoda sahiptir. Dolayısı ile Fourier seri gösterimine açılabilir. Fourier seri katsayıları aşağıdaki entegralden elde edilir.

$$c_n = f_m \int_0^{\frac{1}{f_m}} e^{j\beta \sin 2\pi f_m t} e^{-jn2\pi f_m t}\, dt$$

$$\overset{u=2\pi f_m t}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\beta(\sin u - nu)}\, du \tag{4.2.3}$$

Bu son ifade, *n. dereceden birinci tip Bessel fonksiyonları* olarak bilinen bir entegraldir ve $J_n(\beta)$ olarak gösterilir. Dolayısı ile kompleks üstel için Fourier serileri

$$e^{j\beta \sin 2\pi f_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j2\pi n f_m t} \tag{4.2.4}$$

şeklinde ifade edilir.

Denklem (4.2.4), denklem (4.2.2)'de yerine konulur ise

$$u(t) = \mathrm{Re}\left(A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j2\pi n f_m t} e^{j2\pi f_c t}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c J_n(\beta) \cos\left(2\pi (f_c + n f_m) t\right) \tag{4.2.5}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifade modüle edici işaret olarak f_m frekansında bir sinüzoidal gibi oldukça basit bir işaret kullanıldığı durumda dahi, açı modülasyonlu işaret $f_c + nf_m \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ olacak şekilde tüm frekansları içerdiğini göstermektedir. Bundan dolayı, modülasyonlu işaretin gerçek bandgenişliği sonsuzdur. Ancak, büyük n değerleri için $f_c + nf_m$ frekanslarındaki sinüzoidal bileşenlerinin genlikleri oldukça küçüktür. Dolayısı ile modülasyonlu işaret için sonlu büyüklükte bir *etkin bandgenişliği* tanımlayabiliriz. Küçük β değerleri için,

$$J_n(\beta) \approx \frac{\beta^n}{2^n n!} \tag{4.2.6}$$

yaklaşımı kullanılabilir. Böylece küçük modülasyon indeksi β için n=1'e karşılık gelen sadece ilk yanband önemlidir. Ayrıca, Bessel fonksiyonu için aşağıdaki simetri özelliği kolaylıkla gösterilebilir.

$$J_{-n}(\beta) = \begin{cases} J_n(\beta), & n \\ -J_n(\beta), & n \end{cases} \tag{4.2.7}$$

Farklı n değerleri için $J_n(\beta)$ çizimleri Şekil 4.4'de verilmiştir. Bessel fonksiyonunun değerleri ise Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Örnek 4.2.1

Taşıyıcı $c(t) = 10\cos(2\pi f_c t)$ şeklinde ve mesaj işareti $\cos(20\pi t)$ olarak verilmiş olsun Ayrıca mesaj işaretinin, taşıyıcıyı $k_f = 50$ değeri ile frekans modülasyonu gerçekleştirmek için kullanıldığını varsayalım. Modülasyonlu işaret için ifadeyi elde edin ve % 99 modülasyonlu işaret gücünü içerecek şekilde kaç harmonik seçilmesi gerektiğini belirleyin.

Çözüm Taşıyıcı işaretin içerdiği güç içeriği

$$P_c = \frac{A_c^2}{2} = \frac{100}{2} = 50 \tag{4.2.8}$$

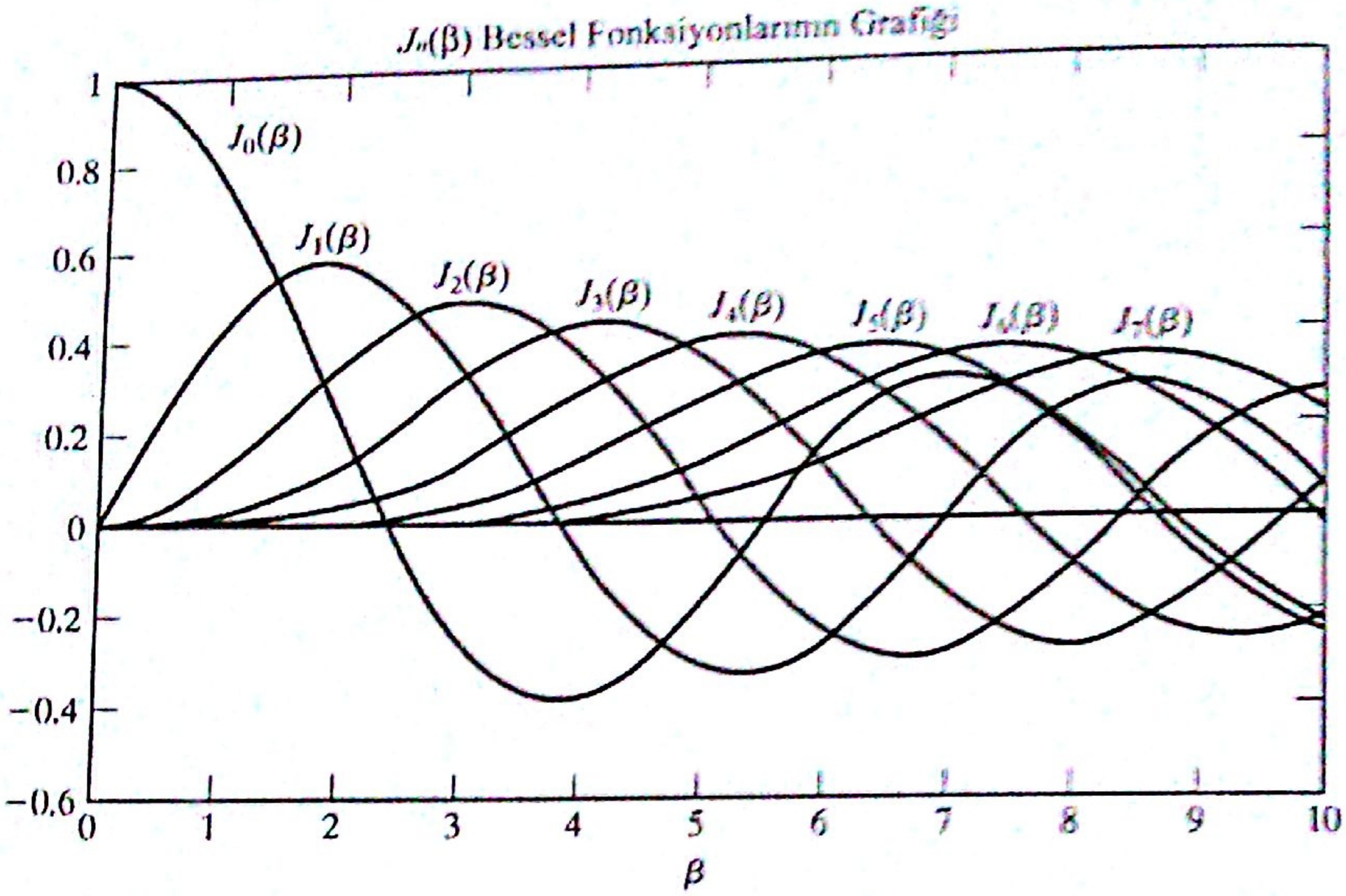
olarak verilir. Modüle edilmiş işaret

$$u(t) = 10\cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} \cos(20\pi\tau)\, d\tau\right)$$

$$= 10\cos\left(2\pi f_c t + \frac{50}{10}\sin(20\pi t)\right)$$

$$= 10\cos(2\pi f_c t + 5\sin(20\pi t)) \tag{4.2.9}$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 4.4 Farklı *n* değerleri için Bessel fonksiyonları

TABLO 4.1 BESSEL FONKSİYON DEĞER TABLOSU

n	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 8$	$\beta = 10$
0	0.997	0.990	0.938	0.765	0.224	−0.178	0.172	−0.246
1	0.050	0.100	0.242	0.440	0.577	−0.328	0.235	0.043
2	0.001	0.005	0.031	0.115	0.353	0.047	−0.113	0.255
3				0.020	0.129	0.365	−0.291	0.058
4				0.002	0.034	0.391	−0.105	−0.220
5					0.007	0.261	0.186	−0.234
6					0.001	0.131	0.338	−0.014
7						0.053	0.321	0.217
8						0.018	0.223	0.318
9						0.006	0.126	0.292
10						0.001	0.061	0.207
11							0.026	0.123
12							0.010	0.063
13							0.003	0.029
14							0.001	0.012
15								0.004
16								0.001

(Ziemer ve Tranter © 1990 Houghton Mifflin, izin alınarak yeniden basılmıştır.)
Tek ve çift altçizgiler sırası ile toplam gücün % 70 ve % 98'ini içerecek sayıda harmonikleri ifade etmektedir.

Modülasyon indeksi Denklem (4.1.16)'dan

$$\beta = k_f \frac{\max[|m(t)|]}{f_m} = 5 \tag{4.2.10}$$

olarak bulunur. Dolayısı ile FM modülasyonlu işaret

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c J_n(\beta) \cos(2\pi(f_c + nf_m)t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 10 J_n(5) \cos(2\pi(f_c + 10n)t) \tag{4.2.11}$$

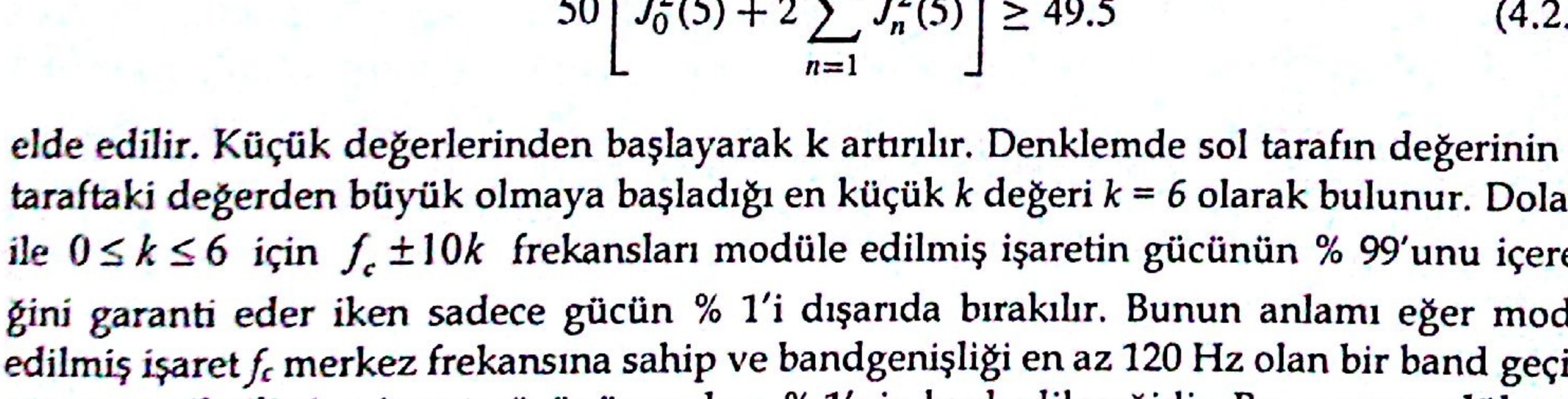
olur. Modülasyonlu işaretin frekans içeriği farklı n değerleri için $f_c + 10n$ formundaki frekanslarda yoğunlaşmıştır. Toplam gücün % 99'unun etkin bandgenişliği içerisinde olmasını garanti etmek için, k değerini

$$\sum_{n=-k}^{n=k} \frac{100 J_n^2(5)}{2} \geq 0.99 \times 50 \tag{4.2.12}$$

olacak şekilde yeteri kadar büyük seçmeliyiz. Bu doğrusal olmayan bir denklemdir ve (k için) çözümü deneme-yanılma ve Bessel fonksiyon tablolarını kullanarak bulunur. Bu denkleme çözüm arayışında denklem (4.2.7)'de verilen Bessel fonksiyonlarının simetri özelliğinden faydalanılır. Bu özelliği kullanılarak

$$50\left[J_0^2(5) + 2\sum_{n=1}^{k} J_n^2(5)\right] \geq 49.5 \tag{4.2.13}$$

elde edilir. Küçük değerlerinden başlayarak k artırılır. Denklemde sol tarafın değerinin sağ taraftaki değerden büyük olmaya başladığı en küçük k değeri $k = 6$ olarak bulunur. Dolayısı ile $0 \leq k \leq 6$ için $f_c \pm 10k$ frekansları modüle edilmiş işaretin gücünün % 99'unu içereceğini garanti eder iken sadece gücün % 1'i dışarıda bırakılır. Bunun anlamı eğer modüle edilmiş işaret f_c merkez frekansına sahip ve bandgenişliği en az 120 Hz olan bir band geçiren süzgeçten iletilir ise, işaret gücünün sadece % 1'nin kaybedileceğidir. Bu e açı modülasyonlu işaretin *etkin bandgenişliğinin* 120 Hz olarak tanımlanabilmesi için pratik bir yöntem sunar. Şekil 4.5 modülasyonlu işarettin etkin bandgenişliğinde mevcut olan frekansları göstermektedir. ■



Şekil 4.5 Örnek 4.2.1 için etkin bandgenişliğindeki mevcut harmonikler

Genel olarak, işaret gücünün % 98'ini içeren açı modülasyonlu bir işaretin etkin bandgenişliği

$$B_c = 2(\beta + 1) f_m \tag{4.2.14}$$

ifadesi ile verilir. Burada β modülasyon indeksi ve f_m sinüzoidal mesaj işaretinin frekansıdır. Mesaj işaretinin genlik ve frekansının, modüle edilmiş işaretin bandgenişliği ve harmonik sayısı üzerindeki etkisini incelemek bilgi vericidir. Mesaj işaretinin

$$m(t) = a\cos(2\pi f_m t) \tag{4.2.15}$$

olarak verildiğini kabul edelim. (4.2.14), (4.2.13) ve (4.1.13) denklemleri kullanılarak modülasyonlu işaretin bandgenişliği[3]

$$B_c = 2(\beta + 1) f_m = \begin{cases} 2(k_p a + 1) f_m & \text{FzM} \\ 2\left(\frac{k_f a}{f_m} + 1\right) f_m & \text{FM} \end{cases} \tag{4.2.16}$$

şeklinde veya

$$B_c = \begin{cases} 2(k_p a + 1) f_m & \text{FzM} \\ 2(k_f a + f_m) & \text{FM} \end{cases} \tag{4.2.17}$$

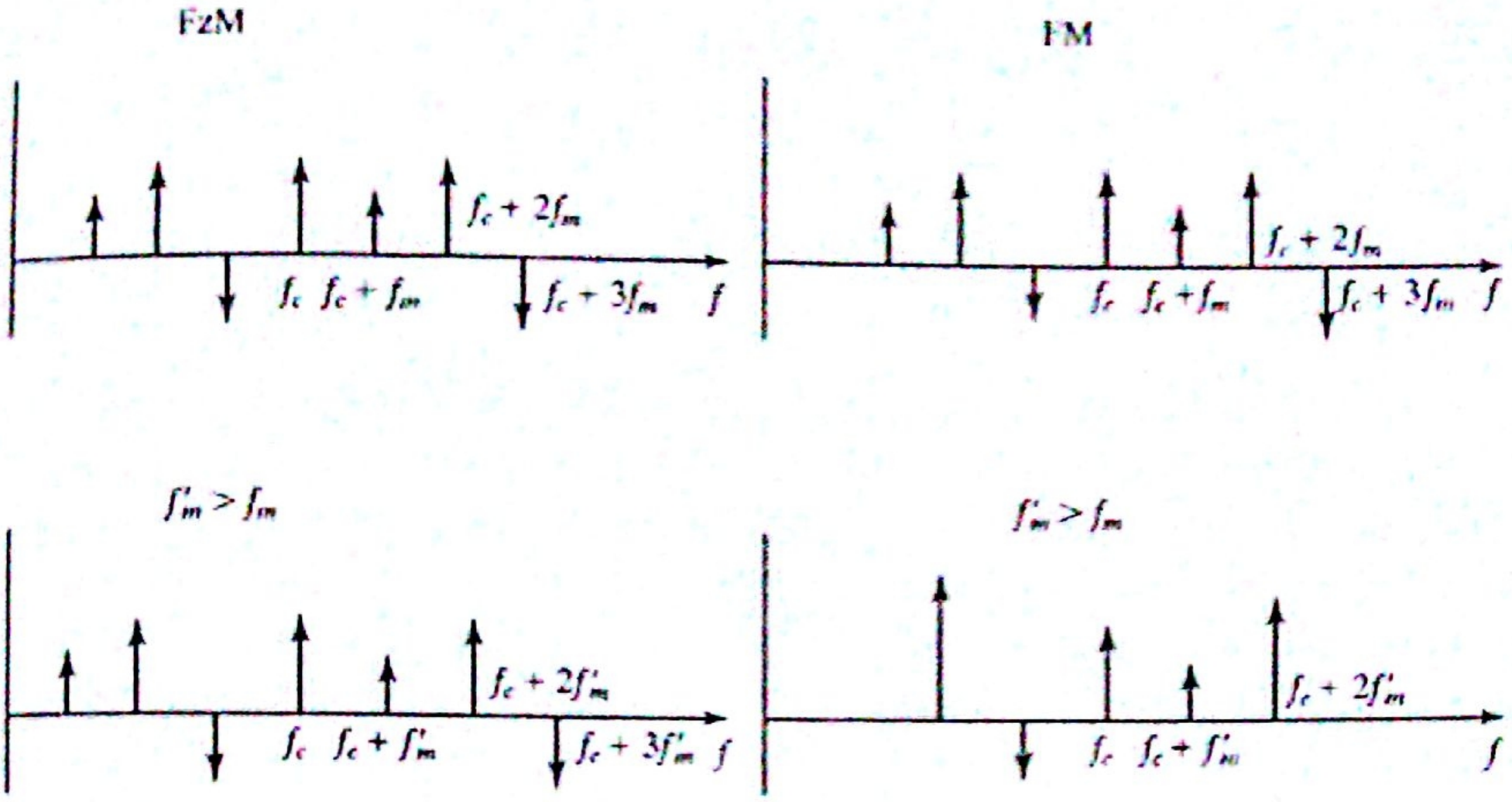
olarak verilir. Yukarıdaki ifade, FzM ve FM'da, modüle edici a işaretin genliğinin artırılmasının, B_c bandgenişliğinin artırılması etkisine sahip olduğunu göstermektedir. Öte yandan, modüle edici işaretin frekansının, f_m'in, artırılması, FM işarete kıyasla, FzM işaretin bandgenişliğinin artımında çok daha belirgin bir etkiye sahiptir. Her iki FzM ve FM modülasyonda, B_c bandgenişliği f_m frekansının arttırılması ile artmaktadır; ancak FzM'de bu artış oransal bir artış iken, FM'de sadece, (büyük β'lar için) çok belirgin olmayan toplamsal bir artıştır. Şimdi de bandgenişliğindeki harmonik sayısına (taşıyıcı dahil) bakılır ve bu değer M_c ile ifade edilir ise

$$M_c = 2(\lfloor\beta\rfloor + 1) + 1 = 2\lfloor\beta\rfloor + 3 = \begin{cases} 2\lfloor k_p a\rfloor + 3 & \text{FzM} \\ 2\left\lfloor\frac{k_f a}{f_m}\right\rfloor + 3 & \text{FM} \end{cases} \tag{4.2.18}$$

elde edilir. Her iki durumda, a genlik değerinin artırılması, modülasyonlu işaret bandgenişliği içindeki harmonik sayısını artırmaktadır. Ancak, f_m'in artırılmasının FzM işaretlerinin bandgenişliği içerisindeki harmoniklerin sayısı üzerinde bir etkisi yok iken ve FM işaretlerde harmoniklerin sayısı hemen hemen doğrusal olarak azalmaktadır. Bu FM işaretlerinin mesaj işaretinin frekansına karşı sahip olduğu bağıl duyarsızlığı izah etmektedir. İlk olarak, f_m'in artırılması bandgenişliği içerisinde harmonik sayılarını azaltır ve aynı zamanda harmonikler arasındaki mesafeyi artırır. Bunun net etkisi bandgenişliğinin hafif olarak artmasıdır. FzM'de ise harmonik sayısı sabit kalır ve sadece harmonikler arasındaki mesafe artar. Dolayısı ile net etki bandgenişliğinde doğrusal bir artıştır. Şekil 4.6 mesaj işaretinin frekansının artmasının FM ve FzM'deki etkisini göstermektedir.

---

[3] *Kitabın bundan sonraki bölümlerinde, aksi belirtilmedikçe, "bandgenişliği" etkin bandgenişliği olarak kullanılacaktır.*



Şekil 4.6 Mesaj işaretinin bandgenişliğinin iki katına çıkarılmasının FM ve FzM'deki etkisi

4.2.2. Herhangi Bir İşaret ile Açı Modülasyonu

Genel bir mesaj işareti $m(t)$ için açı modülasyonlu işaretin spektral karakteristiği, modülasyon sürecinin doğrusal olmayan doğasından dolayı oldukça karmaşıktır. Ancak modülasyonlu işaretin etkin bandgenişliği için yaklaşık ilişkiler mevcuttur. Bu ilişki *Carson kuralı* olarak bilinir ve

$$B_c = 2(\beta + 1)W \tag{4.2.19}$$

şeklinde verilir. Burada β modülasyon indeksidir ve

$$\beta = \begin{cases} k_p \max[|m(t)|] & \text{FzM} \\ \dfrac{k_f \max[|m(t)|]}{W} & \text{FM} \end{cases} \tag{4.2.20}$$

olarak tanımlanmıştır. W mesaj işareti $m(t)$'in bandgenişliğidir. Genişband FM genellikle 5 veya daha büyük bir β değerine sahip olduğundan, açı modülasyonlu işaretin bandgenişliği farklı genlik-modülasyon yöntemlerinin bandgenişliğinden, ki bu bandgenişliği W (TYB modülasyonda) veya $2W$ (ÇYB modülasyonu veya geleneksel GM'de) büyüklüğündedir, çok daha büyüktür.

Örnek 4.2.2

Varsayalım ki $m(t) = 10\sin c(10^4 t)$ olsun. Bu durumda FM modülasyonlu bir işaretin iletim bandgenişliğini $k_f = 4000$ için belirleyin.

Çözüm FM işaretler için, $B_c = 2(\beta+1)W$. W değerini bulmak için, $m(t)$ işaretinin spektrumu bulunmalıdır. $M(f) = 10^{-3}\Pi(10^{-4} f)$ olduğuna göre $m(t)$ 5000 Hz bandgenişliğine sahiptir. $m(t)$'in maksimum genliği 10 olduğundan

$$\beta = \frac{k_f \max[|m(t)|]}{W} = \frac{4000 \times 10}{5000} = 8$$

ve $B_c = 2(8+1) \times 5000 = 90000$ Hz $= 90$ kHz olur.

■

4.3 AÇI MODÜLATÖRLERİNİN VE DEMODÜLATÖRLERİNİN GERÇEKLENMESİ

Herhangi bir modülasyon veya demodülasyon süreci giriş işaretinde mevcut olmayan yeni frekansların üretilmesini içerir. Bu hem genlik ve hem de açı modülasyonu sistemleri için geçerlidir. Dolayısı ile giriş işareti olarak $m(t)$ mesaj işaretini ve çıkış olarak $u(t)$ modülasyonlu işaretini alan bir modülatör sistemini ele alalım; bu sistem giriş işaretinde mevcut olmayan frekanslara çıkış işaretinde sahip olacaktır. Dolayısı ile bir modülatör (ve demodülatör) doğrusal zamanla değişmeyen sistemler olarak modellenemez. Çünkü doğrusal zamanla değişmeyen sistemler çıkışında, giriş işaretinde mevcut olmayan herhangi bir frekans bileşenini üretemez.

Açı Modülatörleri. Açı modülatörleri genellikle zamanla değişen ve doğrusal olmayan sistemlerdir. Bir FM işareti doğrudan üretmenin bir yöntemi frekansı giriş gerilimi ile değişen bir osilatör tasarlamaktır. Giriş gerilimi sıfır olduğunda, osilatör f_c frekansında bir sinüzoidal üretir; giriş gerilimi değiştiğinde, bu frekansta uygun bir şekilde değişecektir. VCO (Voltage-controlled osillator) veya *Gerilim Kontrollü Osilatör (GKO)* olarak isimlendirilen böyle bir osilatör tasarlamanın iki yöntemi vardır. Yöntemlerden biri *bir varaktör diyot* kullanmaktır. Varaktör diyot, üzerine uygulanan gerilim ile kapasitesi değişen bir kapasitördür. Dolayısı ile eğer bu kapasitör osilatörün tank devresinde kullanılır ise ve mesaj işareti bu kapasitöre uygulanır ise, tank devresinin frekansı ve dolayısı ile osilatörün frekansı mesaj işaretine bağımlı olarak değişecektir. Şekil 4.7'de verilmiş olan tank devresindeki induktörün endüktansı L_0 olsun ve varaktörün sığası

$$C(t) = C_0 + k_0 m(t) \tag{4.3.1}$$

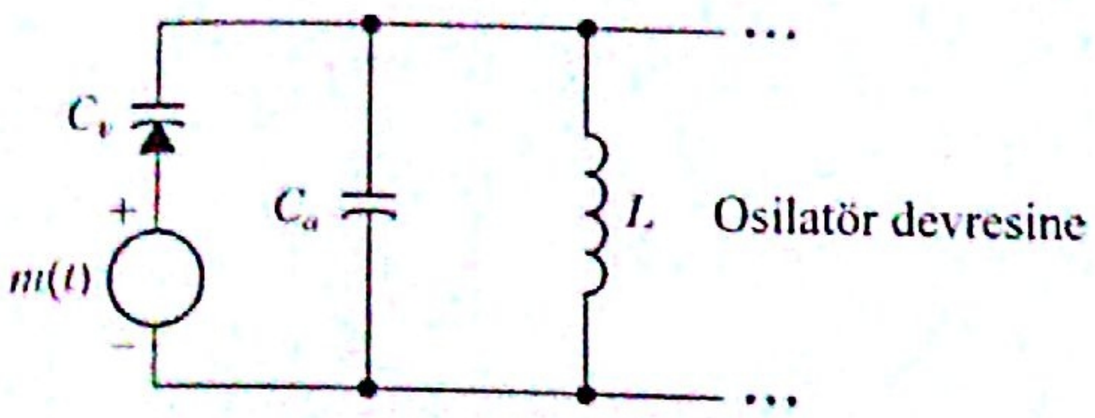
olarak verilsin. Eğer $m(t)=0$ ise tank devresinin frekansı $f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}}$ olur. Genel olarak $m(t)$ sıfırdan farklı ise

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \frac{1}{\pi\sqrt{L_0(C_0 + k_0 m(t))}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k_0}{C_0} m(t)}} \\ &= f_c \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k_0}{C_0} m(t)}} \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

elde edilir.

$$\epsilon = \frac{k_0}{C_0} m(t) \ll 1$$

kabul edilir ise



Şekil 4.7 Bir açı modülatörünün varaktör diyot uyarlaması

$$\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2} \tag{4.3.3}$$

ve

$$\frac{1}{1+\epsilon} \approx 1 - \epsilon \tag{4.3.4}$$

yaklaşımları altında

$$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

elde edilir. Dolayısı ile

$$f_i(t) \approx f_c \left(1 - \frac{k_0}{2C_0} m(t)\right) \tag{4.3.5}$$

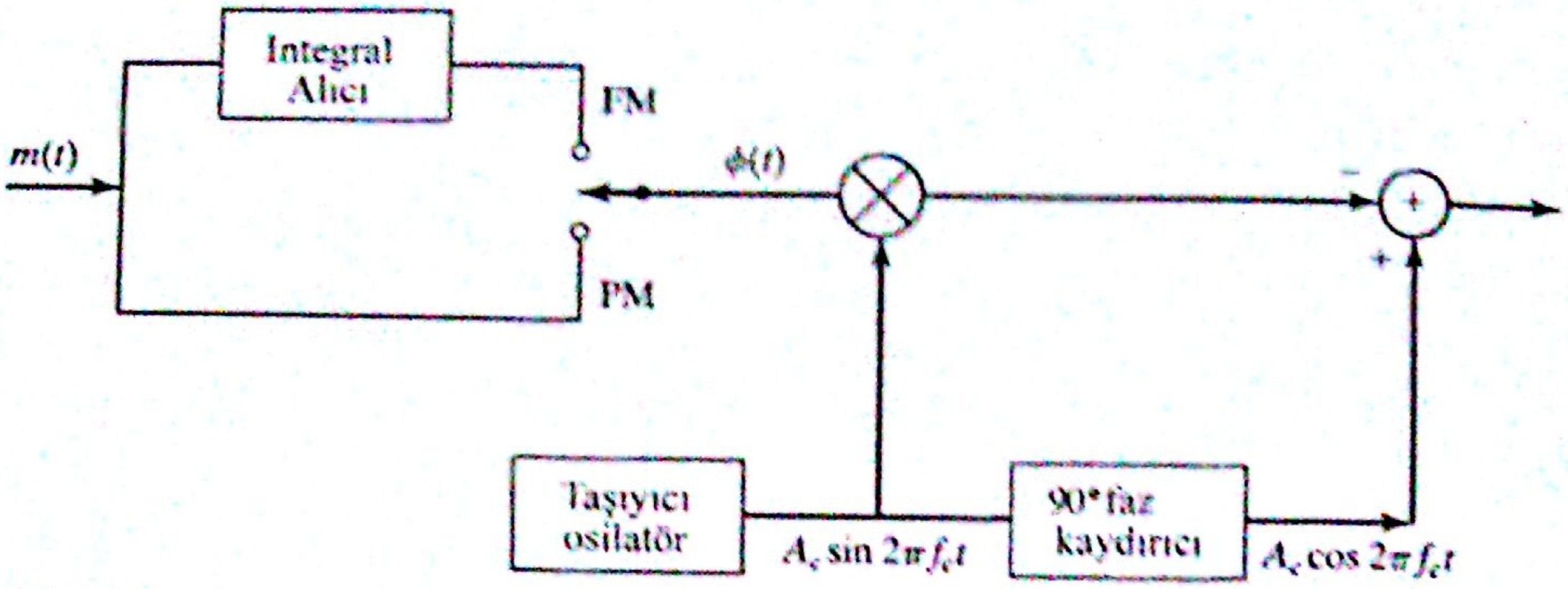
olur ki bu ifade frekans modülasyonlu işaret için elde edilen ilişkidir.

FM işaret üretmek için kullanılan ikinci yaklaşım ise reaktans (sanal direnç) tüpü kullanmaktır. Reaktans tüp uygulamasında, üzerine uygulanan gerilim ile endüktansı değişen bir endüktör kullanılır; analiz varaktör diyodu için verilen analize oldukça benzerdir. Her ne kadar bu yöntemleri FM işaretlerin üretimi için ele almış olsak da, aynı yöntemler, FM ve FzM işaretler arasındaki yakın ilişkiden dolayı, temel olarak FzM işaretlerinin üretimi içinde uygulanabilir. (Şekil 4.1'e bakınız).

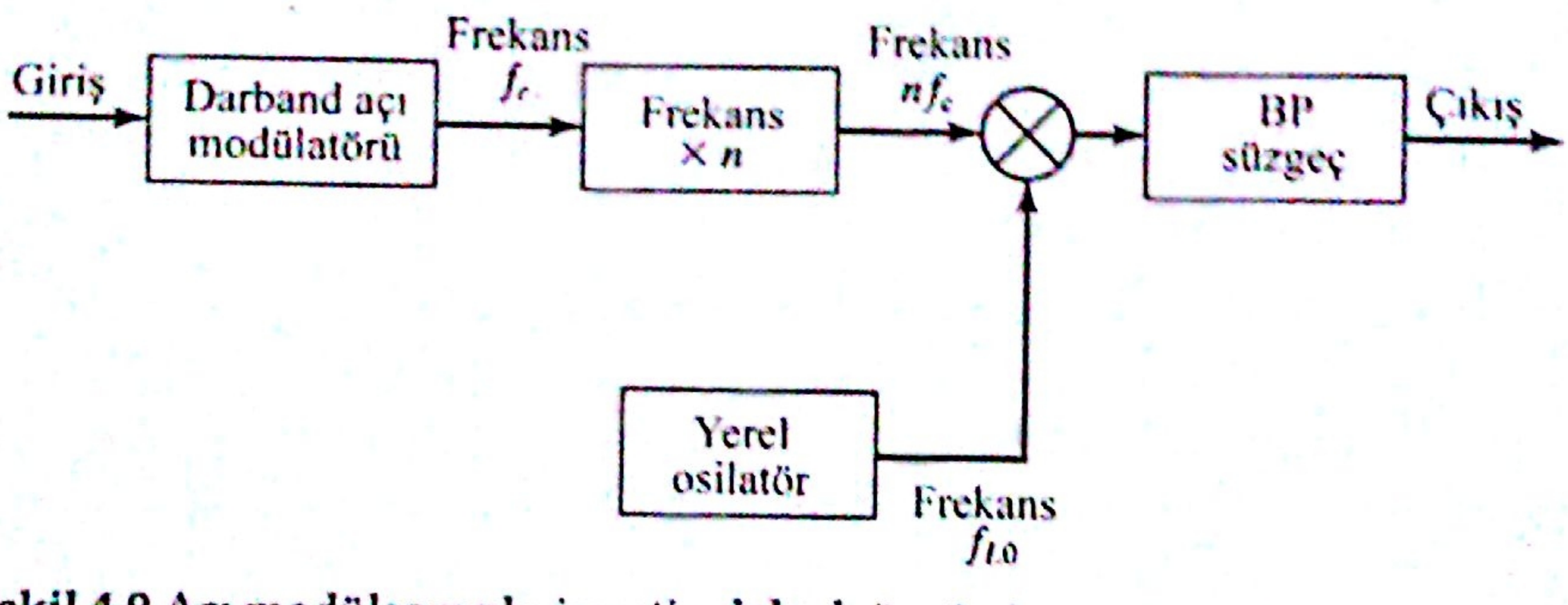
Açı modülasyonlu işaret üretmenin bir başka yöntemi ilk olarak bir darband açı modülasyonlu işaret üretmek ve sonra bu işareti genişband işarete dönüştürmektir. Bu yöntem genellikle FM ve FzM işartlerin üretimi için *dolaylı yöntem* olarak bilinir. Geleneksel GM işaretlere olan benzerliğinden ötürü, darband açı modülasyonlu işaretlerin üretimi oldukça basittir. Aslında geleneksel GM üretimi için kullanılan herhangi bir modülatör dar band açı modülasyonlu işaret üretmek için kolaylıkla değiştirilebilir. Şekil 4.8 bir dar band açı modülatörünün blok diyagramını göstermektedir. Daha sonra darband açı modülasyonlu işaret geniş band açı modülasyonlu işaret üretmek için kullanılır. Şekil 4.9 böyle bir sistemin blok diyagramını göstermektedir. Bu sistemin ilk basamağı Şekil 4.8'de gösterilen bir darband açı modülatörü oluşturmaktır. Darband açı modülasyonlu işaret, giriş işaretinin ani frekansını bir sabit n değeri ile çarpan bir frekans çarpıcıya giriş olarak verilir. Bu genellikle doğrusal olmayan bir elemana giriş işaretinin uygulanması ve sonra bu elemanın çıkışının istenilen merkez frekansına ayarlanmış bir band geçiren süzgece verilmesi ile gerçekleştirilir. Eğer darband modülasyonlu işaret

$$u_n(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \tag{4.3.6}$$

olarak verilir ise



Şekil 4.8 Bir darband açı modülasyonlu işaretin üretimi



Şekil 4.9 Açı modülasyonlu işaretin dolaylı üretimi

Frekans çarpıcının çıkışı (bandgeçiren süzgeç çıkısı)

$$y(t) = A_c \cos(2\pi n f_c t + n\phi(t)) \tag{4.3.7}$$

olarak verilir. Genel olarak, bu bir geniş band modülasyonlu işarettir. Ancak, bu işaretin taşıyıcı frekansının, nf_c, arzu edilen taşıyıcı frekans olması garanti edilemez. En son adımda, modülatör modüle edilmiş işareti arzu edilen merkezi frekansa ötelemek için bir yukarı/aşağı dönüşüm gerçekleştirir. Bu adım bir karıştırıcı (mikser) ve bir bandgeçiren süzgeç içerir. Eğer mikser yerel osilatörünün frekansı f_{LO} ise ve bir aşağı dönüştürücü kullanılır ise sonuç geniş band açı modülasyonu

$$u(t) = A_c \cos\left(2\pi(nf_c - f_{LO})t + n\phi(t)\right) \tag{4.3.8}$$

olarak verilir. n ve f_{LO} değerlerini serbestçe seçebildiğimizden, bu yöntemi kullanarak herhangi bir taşıyıcı frekansında herhangi bir modülasyon indeksi üretilebilir.

FM demodülatörleri, genliği FM işaretin ani frekansına bağımlı olarak değişen bir GM işaret üretimi ve daha sonra mesaj işaretini yeniden elde etmek için bir GM demodülatörü kullanarak gerçekleştirilir. İlk adımı gerçekleştirmek için, yani FM işareti GM işaretine dönüştürmek için, FM işareti, FM işaretinin frekans bandında,

doğrusal bir frekans tepkisine sahip bir DZD sistemden geçirmek yeterlidir. Eğer böyle bir sistemin frekans tepkisi

$$|H(f)| = V_0 + k(f - f_c) \qquad |f - f_c| < \frac{B_c}{2} \tag{4.3.9}$$

olarak verilir ise ve sisteme giriş

$$u(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\, d\tau\right) \tag{4.3.10}$$

ise bu durumda çıkış

$$v_o(t) = A_c(V_0 + kk_f m(t)) \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\, d\tau\right) \tag{4.3.11}$$

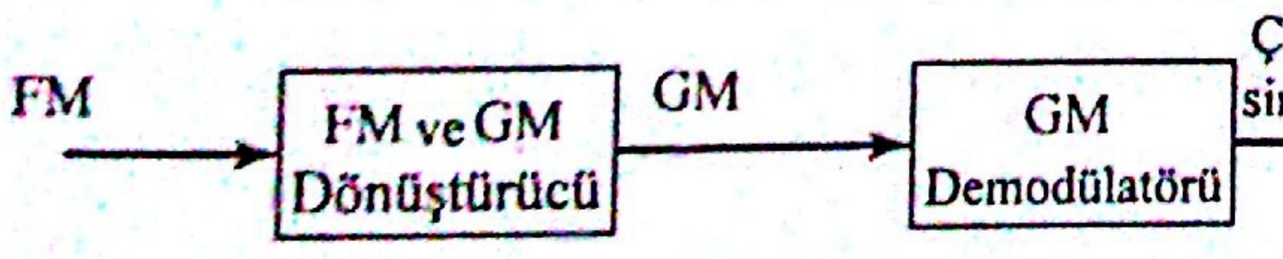
şeklinde bir işaret olacaktır. Bir sonraki aşama, kendisinden $m(t)$ işaretini elde edebileceğimiz $A_c(V_0 + kk_f m(t))$ terimi için yukarıdaki işaretin demodülasyonu olacaktır. Şekil 4.10 bu iki adımın blok diyagramını gösterilmektedir.

Bir FM demodülasyonunun bu ilk adımını gerçekleştirmek için, yani FM işareti GM işarete çevirmek için, birçok devre kullanılabilir. Bu iş

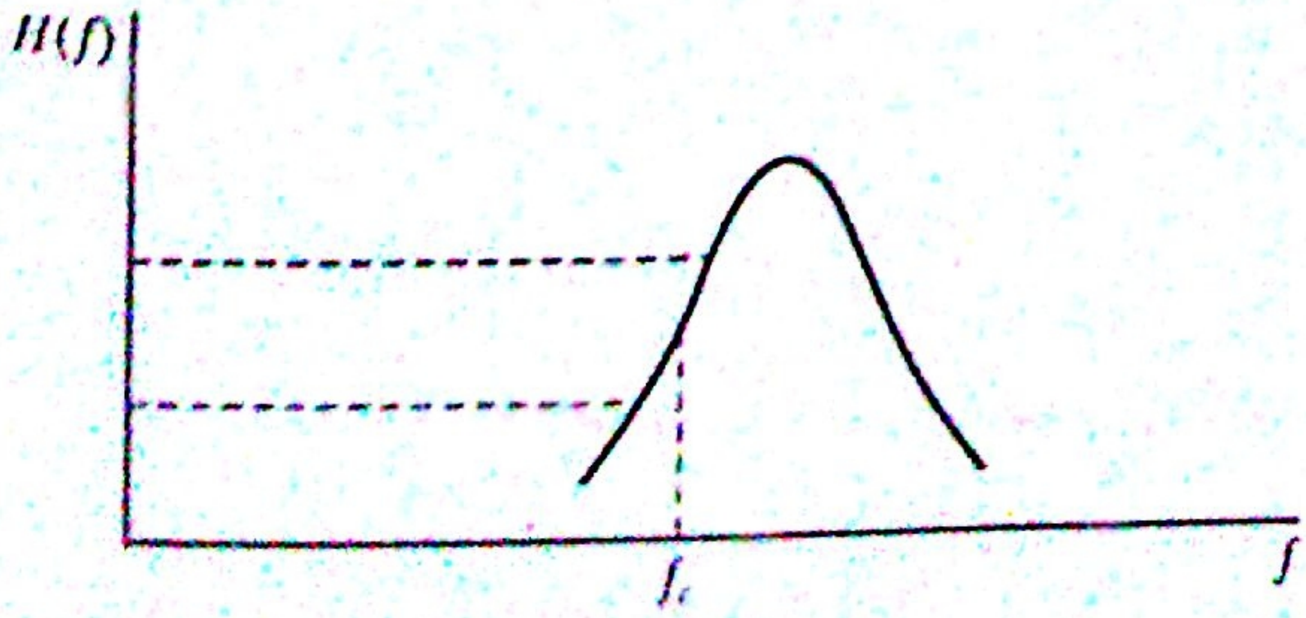
$$|H(f)| = 2\pi f \tag{4.3.12}$$

şeklinde verilen basit bir türev alıcı kullanılabilir.

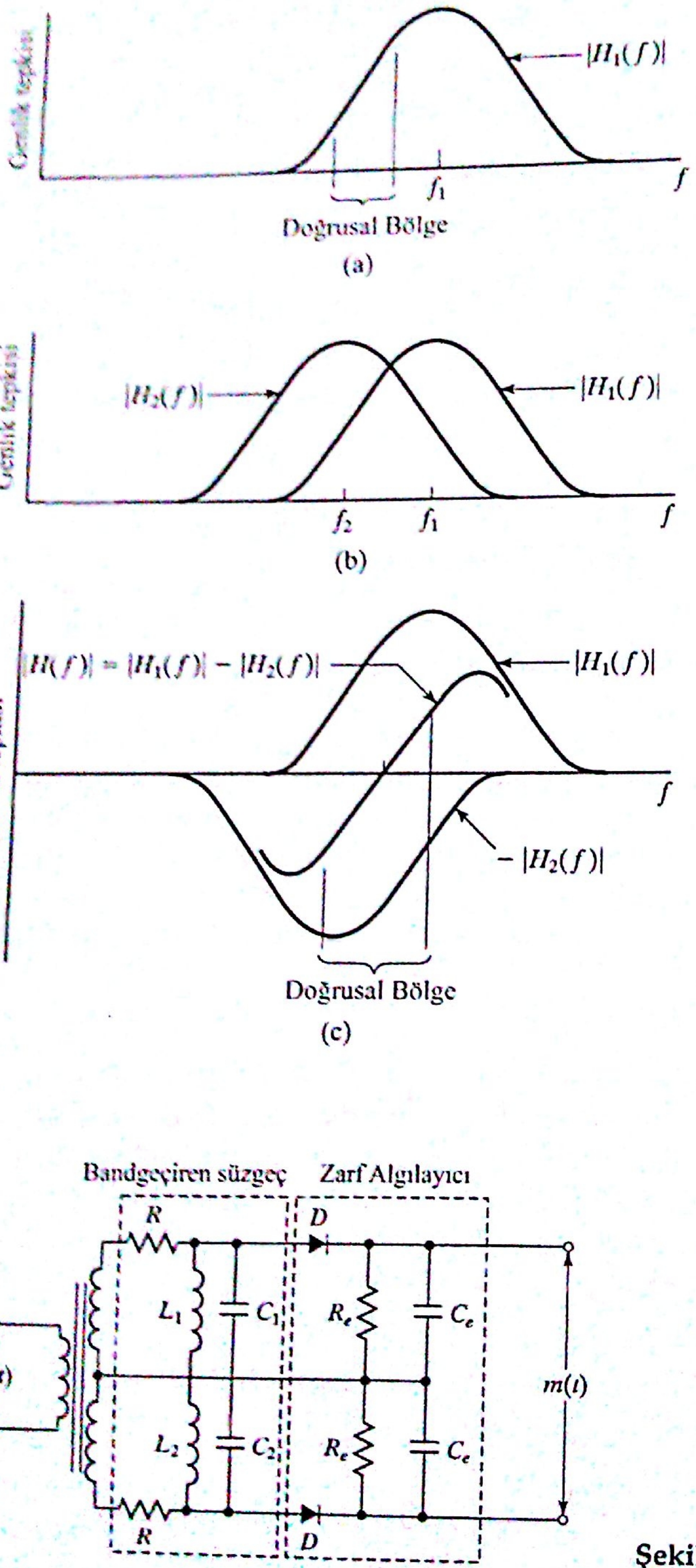
Diğer bir aday ise Şekil 4.11'de gösterilen bir tank devresinin frekans karakteristiğinin yükselen yarısıdır. Böyle bir devre kolayca uyarlanabilir a frekans karakteristiğinin doğrusal bölgesi yeteri kadar geniş olmayabilir. Geniş bir frekans aralığında doğrusal karakteristik elde etmek için genellikle f_1 ve f_2 frekanslarında ayarlanış iki devre, *dengeli ayırt ediciler* olarak bilinen bir konfigürasyon içerisinde bağlanır. Şekil 4.12 dengeli ayırt ediciyi ilgili frekans karakteristiği ile gösterilmektedir.



Şekil 4.10 Genel bir FM demodülatörü



Şekil 4.11 Bir FM demodülatöründe kullanılan tank devresi



Şekil 4.12 Dengeli ayırt edici ve frekans tepkisi

FM işaretini GM işaret haline dönüştüren bu FM demodülasyon yöntemleri FM işaret tarafından kapsanan kanal bandgenişliği B_c'ye eşit bir bandgenişliğine sahiptir. Bunun bir sonucu olarak, demodülatör tarafından aktarılan gürültü B_c, bandgenişliğinin içerdiği gürültü olacaktır.

FM işaretlerin demodülasyonu için farklı bir yöntem FM demodülatöründe FM algılayıcının bandgenişliğini daraltmak için ve Bölüm 6'da görüleceği gibi demodülatörün çıkışındaki gürültü gücünü azaltmak için bir geribesleme kullanmaktır. Şekil 4.13 böyle bir sistemi göstermektedir. Şekilde, FM ayırt edici, geribesleme sisteminde bir Gerilim kontrollü osilator (VCO) içeren geribesleme yolu üzerine yerleştirilmiştir.

Ayırt edicinin ve onu takip eden alçak geçiren süzgecin bandgenişliği mesaj işareti $m(t)$'in bandgenişliğine uyacak şekilde seçilmiştir. Alçak geçiren süzgecin çıkışı arzu edilen bilgi işareti olur. Bu tip FM demodülatörleri geri beslemeli FM demodülatörler (GBFM) (FM with feedback–FMFB) olarak adlandırılır. FMFB demodülatörlere bir alternatif Şekil 4.14'de gösterilen bir faz kilitlemeli döngü (FKD: Phase Locked Loop-PLL) kullanmaktır. (Faz kilitlemeli döngü geniş bir şekilde Altbölüm 6.4'de ele alınacaktır)

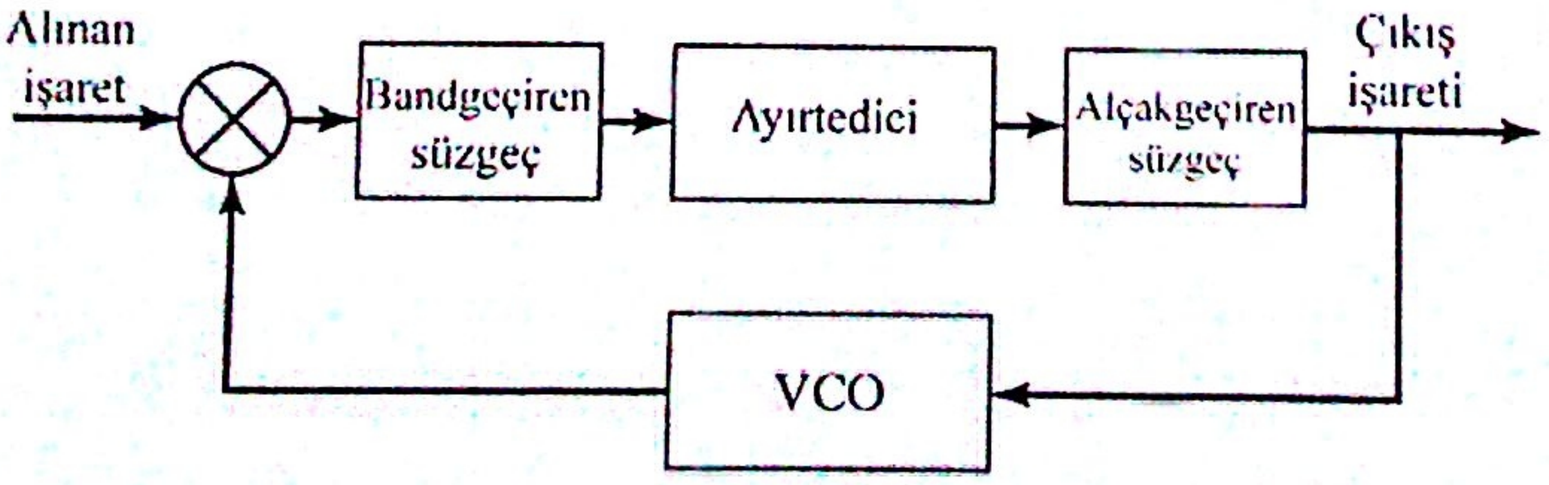
PLL'nin girişi açı modülasyonlu işarettir (bu incelememizde gürültünün varlığı ihmal edilecektir)

$$u(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)], \tag{4.3.13}$$

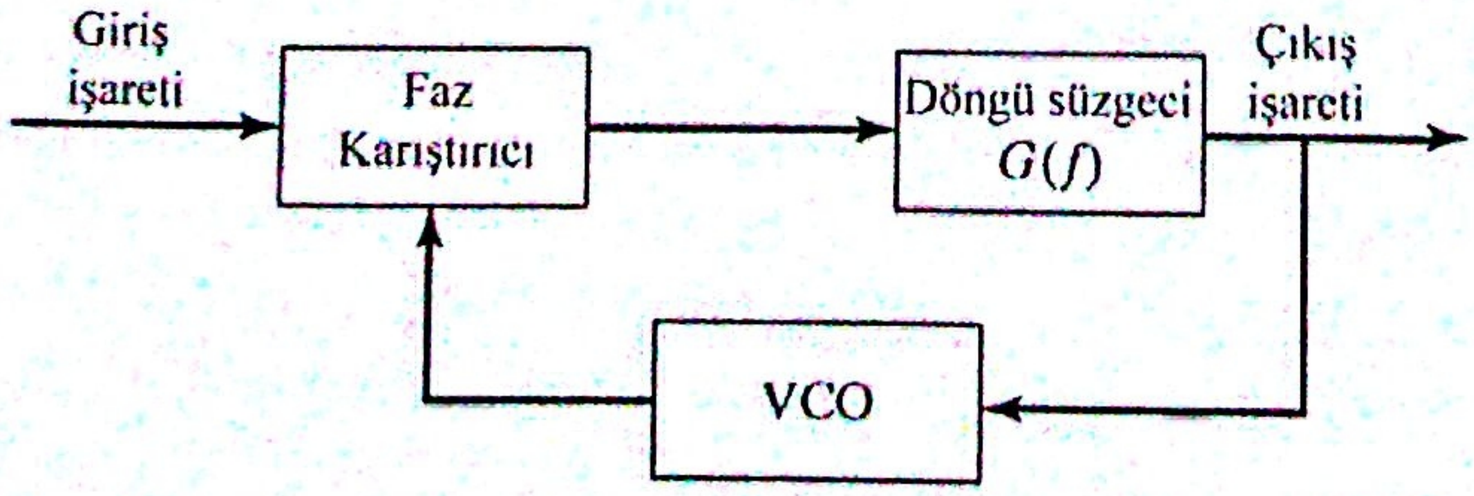
Burada FM için

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\, d\tau. \tag{4.3.14}$$

alınır. VCO sabit frekansta bir sinüzoidal üretir. Giriş kontrol geriliminin olmadığı durumda f_c taşıyıcı frekansı üretilir.



Şekil 4.13 FMFB demodülatörünün blok diyagramı



Şekil 4.14 PLL-FM demodülatörünün blok diyagramı

Şimdi varsayalım ki VCO kontrol gerilimi v(t) olarak gösterilen döngü süzgecinin çıkışı olsun. Bu durumda VCO'nun ani frekansı

$$f_v(t) = f_c + k_v v(t) \tag{4.3.15}$$

olur. Burada k_v Hz/volt birimine sahip sapma sabitidir. Doğal olarak, VCO çıkışı

$$y_v(t) = A_v \sin[2\pi f_c t + \phi_v(t)] \tag{4.3.16}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\phi_v(t) = 2\pi k_v \int_0^t v(\tau)\, d\tau \tag{4.3.17}$$

olur. Faz karşılaştırıcı temel olarak bir çarpıcı ve $2f_c$ frekansındaki bileşenleri bastıran bir süzgeçten ibarettir. Bundan dolayı karşılaştırıcının çıkışı

$$e(t) = \frac{1}{2} A_v A_c \sin[\phi(t) - \phi_v(t)] \tag{4.3.18}$$

şeklinde verilir. Burada $\phi(t) - \phi_v(t) \equiv \phi_e(t)$ farkı faz hatasını oluşturur. $e(t)$ işareti döngü süzgecine giriş olarak uygulanır.

Varsayalım ki PLL kilitlenmiş durumda olsun, bu durumda faz hatası küçük olacaktır. Dolayısı ile bu koşul altında

$$\sin[\phi(t) - \phi_v(t)] \approx \phi(t) - \phi_v(t) = \phi_e(t) \tag{4.3.19}$$

olur ki, bu durumda PLL'in Şekil 4.15'de verilen doğrusal modeli kullanılabilir.

Faz hatası

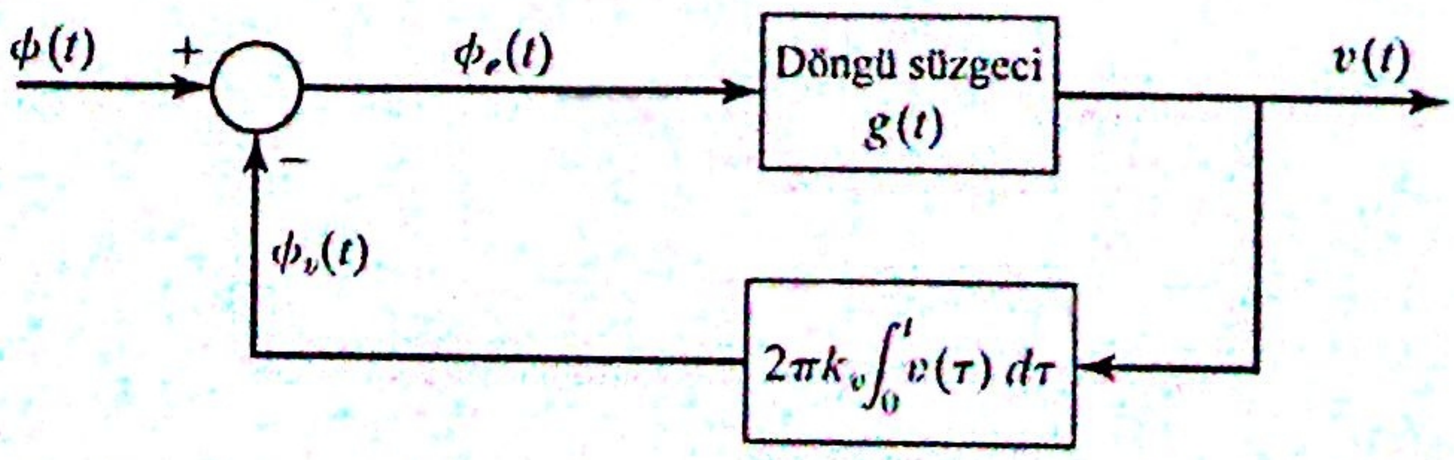
$$\phi_e(t) = \phi(t) - 2\pi k_v \int_0^t v(\tau)\, d\tau \tag{4.3.20}$$

veya denk bir şekilde

$$\frac{d}{dt}\phi_e(t) + 2\pi k_v v(t) = \frac{d}{dt}\phi(t) \tag{4.3.21}$$

olarak ifade edilebilir.

$$\frac{d}{dt}\phi_e(t) + 2\pi k_v \int_0^\infty \phi_e(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = \frac{d}{dt}\phi(t) \tag{4.3.22}$$



Şekil 4.15 Doğrusallaştırılmış (lineerleştirilmiş) PLL

Denklem (4.3.22)'de verilen entegral-fark denkleminin Fourier dönüşümü

$$(j2\pi f)\Phi_e(f) + 2\pi k_v \Phi_e(f)G(f) = (j2\pi f)\Phi(f) \tag{4.3.23}$$

şeklinde olduğundan

$$\Phi_e(f) = \frac{1}{1 + \left(\frac{k_v}{jf}\right) G(f)} \Phi(f) \tag{4.3.24}$$

olur. VCO için bu durumda ilgili kontrol gerilimi

$$\begin{aligned} V(f) &= \Phi_e(f)G(f) \\ &= \frac{G(f)}{1 + \left(\frac{k_v}{jf}\right) G(f)} \Phi(f) \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

olur. Varsayalım ki mesaj işaretinin frekans bandında, yani $|f| < W$ aralığında, $G(f)$

$$\left| k_v \frac{G(f)}{jf} \right| \gg 1 \tag{4.3.26}$$

olacak şekilde tasarlanmış olsun. Bu durumda Denklem (4.3.25) den hareket ile

$$V(f) = \frac{j2\pi f}{2\pi k_v} \Phi(f) \tag{4.3.27}$$

veya denk bir şekilde

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2\pi k_v} \frac{d}{dt} \phi(t) \\ &= \frac{k_f}{k_v} m(t) \end{aligned} \tag{4.3.28}$$

olur. VCO kontrol gerilimi mesaj işareti ile orantılı olduğundan, $v(t)$ demodülasyonlu işaret olacaktır.

Bu durumda frekans tepkisi $G(f)$ olan döngü süzgecinin çıkışı istenilen mesaj işareti olacaktır. Dolayısı ile $G(f)$ bandgenişliği mesaj işaretinin bandgenişliği W ile aynı olmak zorundadır. Bunun bir sonucu olarak döngü süzgecinin çıkışındaki gürültü de W bandgenişliği ile kısıtlanmıştır. Diğer yandan VCO çıkışı, ani frekansı antenden alınan FM işaretinin ani frekansını izleyen, bir genişband FM işareti olur.

FM işaret demodülasyonunda geribesleme kullanmanın en temel avantajı, FM demodülatörüne giren işaretinin, işaret-gürültü-oranının belirli bir kritik değerin altına düştüğünde ortaya çıkan eşik etkisini azaltmaktır. Eşik etkisi geniş olarak Bölüm 6'da ele alınacaktır.

4.4 FM RADYO VE TELEVİZYON YAYINCILIĞI

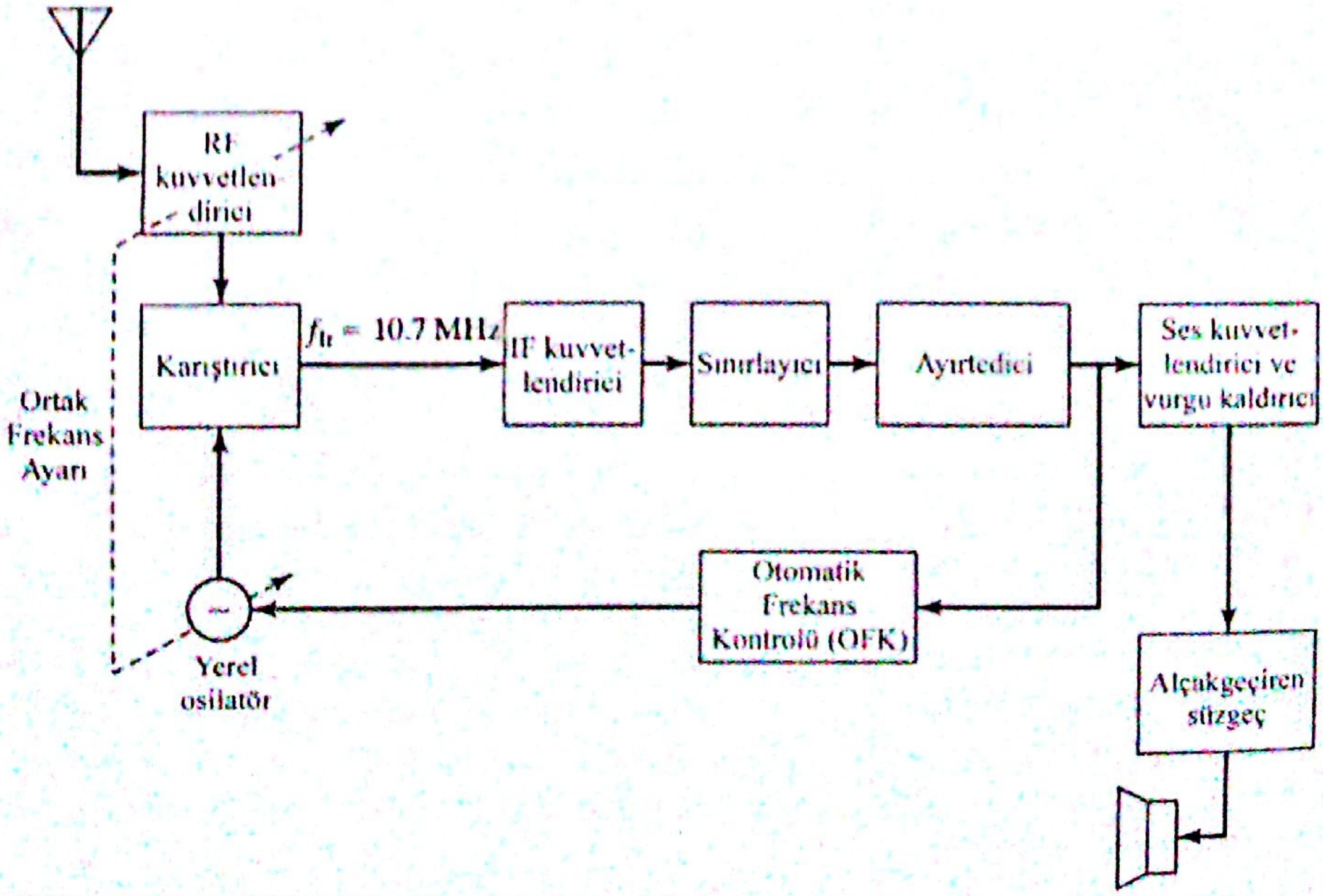
Bu bölümde açı modülasyonu veya genlik-açı modülasyon kombinasyonlarını kullanan yayıncılık sistem tipleri tanımlanacaktır. Bu sistemler FM radyo yayıncılığı ve televizyon yayıncılığıdır.

4.4.1 FM Radyo Yayıncılığı

Ticari FM radyo yayıncılığı ses ve müzik işaretlerinin iletimi için 88-108 MHz frekans bandını kullanır. Taşıyıcı frekansları 200kHz'lik aralıklar ile yerleştirilmiştir ve maksimum frekans sapması 75 kHz'tir. Önkuvvetlendirme, Bölüm 6'da açıklandığı gibi, genellikle alınan işarette gürültü olması durumunda, demodülatörün performansını iyileştirmek için kullanılır.

FM radyo yayıncılığında en sık kullanılan alıcı superheterodyne tip alıcıdır. Bu alıcının blok diyagramı Şekil 4.16'da verilmiştir.

GM radyo alıcılarında olduğu gibi, RF yükselteç ve yerel osilatör arasındaki ortak frekans ayarı mikserin tüm FM radyo işaretlerini $f_{ii} = 10.7MHz$ merkez frekansındaki 200 kHz IF bandgenişliğine taşımasını sağlar. Mesaj işareti $m(t)$ taşıyıcı frekansına gömülmüş olduğundan, alınan işaretteki herhangi bir genlik değişimi sadece toplanır gürültü ve karışımın bir sonucudur. Genlik sınırlayıcı, IF kuvvetlendiricinin çıkışında, alınan işaretteki genlik değişimini, işaretin band sınırlı hale getirilmesi ile yok eder. $f_{ii} = 10.7MHz$ frekansında ve 200 kHz bandgenişliğine sahip bir bandgeçiren süzgeç sınırlayıcının doğal doğrusal olmama karakterinden



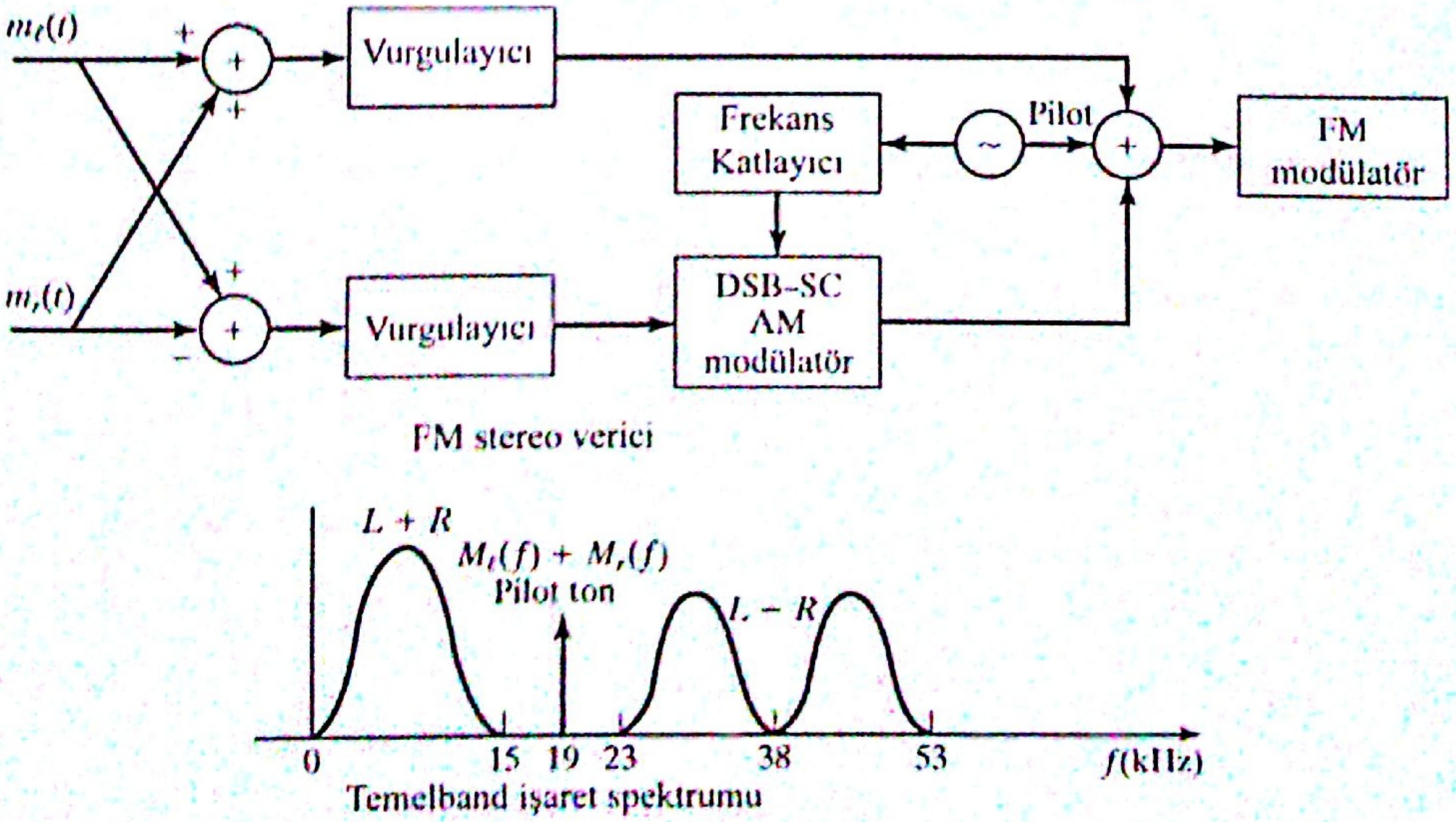
Şekil 4.16 Superheterodyne FM radyo alıcı blok şeması

dolayı ortaya çıkacak yüksek dereceden frekans bileşenlerini uzaklaştırmak için sınırlayıcıya eklenmiştir.

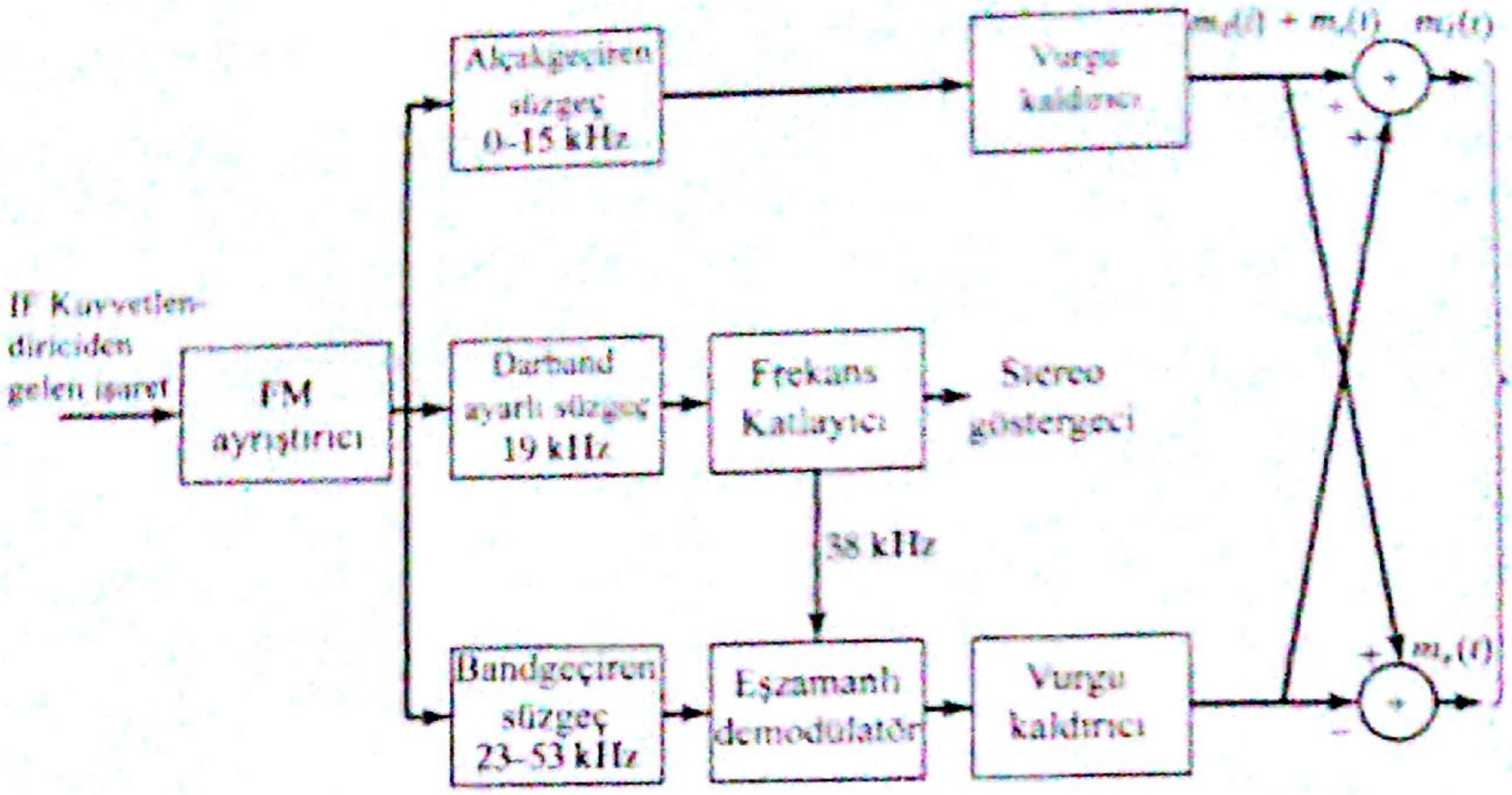
Bir dengeli frekans ayırtedici (freqeuncy discriminator) frekans demodülasyonu için kullanılır. Elde edilen mesaj işareti vurgu kaldırma (deemphasis) ve kuvvetlendirme işlemleri için bir ses-frekans kuvvetlendiricisine verilir. Ses kuvvetlendiricinin çıkışı daha sonra band dışı gürültünün yok edilmesi için bir alçak geçiren süzgece verilir ve bu çıkış hoparlörü sürmek için kullanılır.

FM Stereo Yayıncılık. Birçok FM radyo istasyonu müzik programlarını, sahnenin farklı yerlerine yerleştirilmiş iki mikrofon kullanarak stereo olarak iletir. Şekil 4.17 bir FM stereo vericinin blok şemasını göstermektedir. Sağ ve sol mikrofonlardan gelen işaretler $m_l(t)$ ve $m_r(t)$ şekilde gösterildiği gibi toplanır ve çıkartılır. Toplam işareti $m_l(t)+m_r(t)$ herhangi bir değişime tabi tutulmaz ve 0-15 kHz frekans bandını kaplar. Fark işareti $m_l(t)-m_r(t)$ ise 19 kHz osilatörden elde edilen 38 kHz'lik bir taşıyıcıyı GM modulasyonuna tabi tutar. 19 kHz'deki bir pilot ton ÇYB-TB GM işaretin demodülasyonu için işarete eklenir. Pilot ton, alıcıda bileşik işaretten daha kolayca ayrıştırılabileceği için 38 kHz yerine 19 kHz frekansına yerleştirilir. Elde edilen bileşik işaret, bir taşıyıcının frekans modülasyonu için kullanılır.

Temel band işaretin bir FDM işaret olarak düzenlenmesinden dolayı monofonik FM alıcı toplam işareti, $m_l(t)+m_r(t)$, geleneksel FM demodülatörleri kullanarak elde edebilir. Böylece FM stereo yayıncılık geleneksel FM yayıncılığı ile uyumlu olur. Ayrıca, oluşan FM işaret 200 kHz bandgenişliği sınırlamasını ihlal etmez.



Şekil 4.17 FM stereo verici ve işaretin yerleşimi



Şekil 4.18 FM stereo alıcı

FM stereo için FM demodülatör, temel olarak geleneksel FM demodülatör ile sınırlayıcı/ayrıştırıcıya kadar aynıdır. Dolayısı ile alınan işaret temelbanda dönüştürülür. Ayırt edicinin sonrasında temel band işaret iki işarete ayrıştırılır. $m_l(t)+m_r(t)$ ve $m_l(t)-m_r(t)$ ve Şekil 4.18'de gösterildiği gibi vurgu kaldırıcılara uygulanır. Fark işaret, ÇYB-TB işaretten hareket ile pilot ton kullanılarak eşzamanlı demodülatörde elde edilir. Bileşik işaretin toplamı ve farkının alınması ile her iki işaret $m_l(t)$ ve $m_r(t)$ elde edilir. Bu ses işaretleri ses-band kuvvetlendiriciler tarafından güçlendirilir ve iki çıkış çift hoparlörleri sürer. Belirtildiği gibi, FM stereo yayını almak için uygun olmayan bir FM alıcı sadece 0-15 kHz frekans aralığındaki $m_l(t)+m_r(t)$ temel band işaretini görür. Dolayısı ile iki mikrofondan alınan işaretlerin toplamı olan bir monofonik çıkış işareti üretir.

4.4.2 Televizyon Yayıncılığı

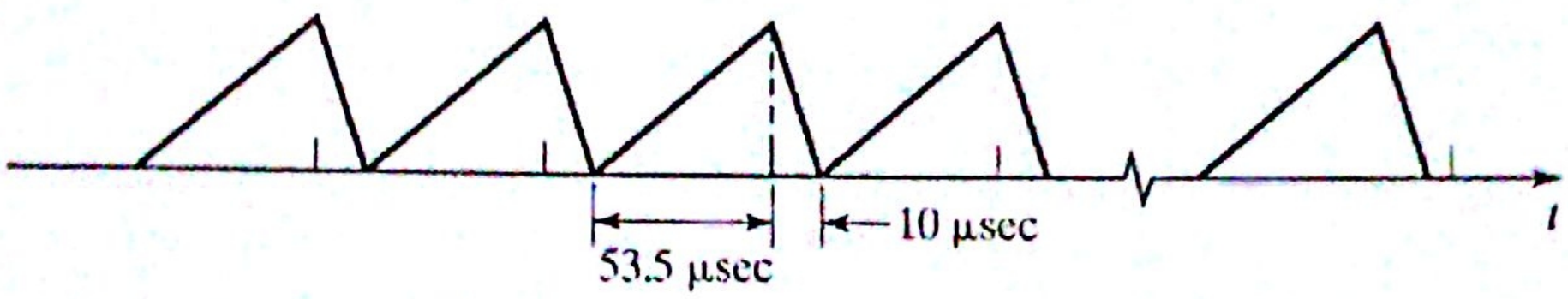
Ticari TV yayıncılığı siyah-beyaz resim iletimi için BBC tarafından 1936 yılında Londora'da başlatılmıştır. Renkli televizyonun demosu birkaç yıl sonra yapılmış fakat renkli TV işaretlerinin iletiminin geliştirilmesinde ticari TV istasyonları yavaş kalmıştır. Bunun nedeni, büyük oranda, renkli TV alıcılarının yüksek maliyeti idi. Transistor ve mikroelektronik bileşenlerinin gelişimi ile renkli TV alıcı maliyetleri önemli ölçüde azalmıştır. 1960'ların ortalarında, renkli TV yayıncılığı sektörün büyük bir kısmı tarafından kullanılmakta idi.

TV yayıncılığı için ayrılan frekanslar VHF ve UHF bandlarına düşmektedir. Tablo 4.2 Birleşik Devletlerde ayrılmış TV kanallarını listelemektedir. TV işaretlerinin iletimi için ayrılan kanal bandgenişliği 6 Mhz'dir.

Radyo yayıncılığının tersine, televizyon işaret iletişim standartları ülkeden ülkeye farklılık göstermektedir. ABD standardı, Ulusal Televizyon Sistemleri Komitesi (National Television Systems Committee NTSC) tarafından belirlenmiştir.

TABLO 4.2 VHF VE UHF FREKANSLARININ TİCARİ TELEVİZYON İÇİN TAHSİSİ

Kanal	Frekans Bandı (6 MHz bangenişliği/istasyonu)
VHF 2–4	54–72 MHz
VHF 5-6	76–88 MHz
VHF 7–13	174–216 MHz
UHF 14–69	470–896 MHz

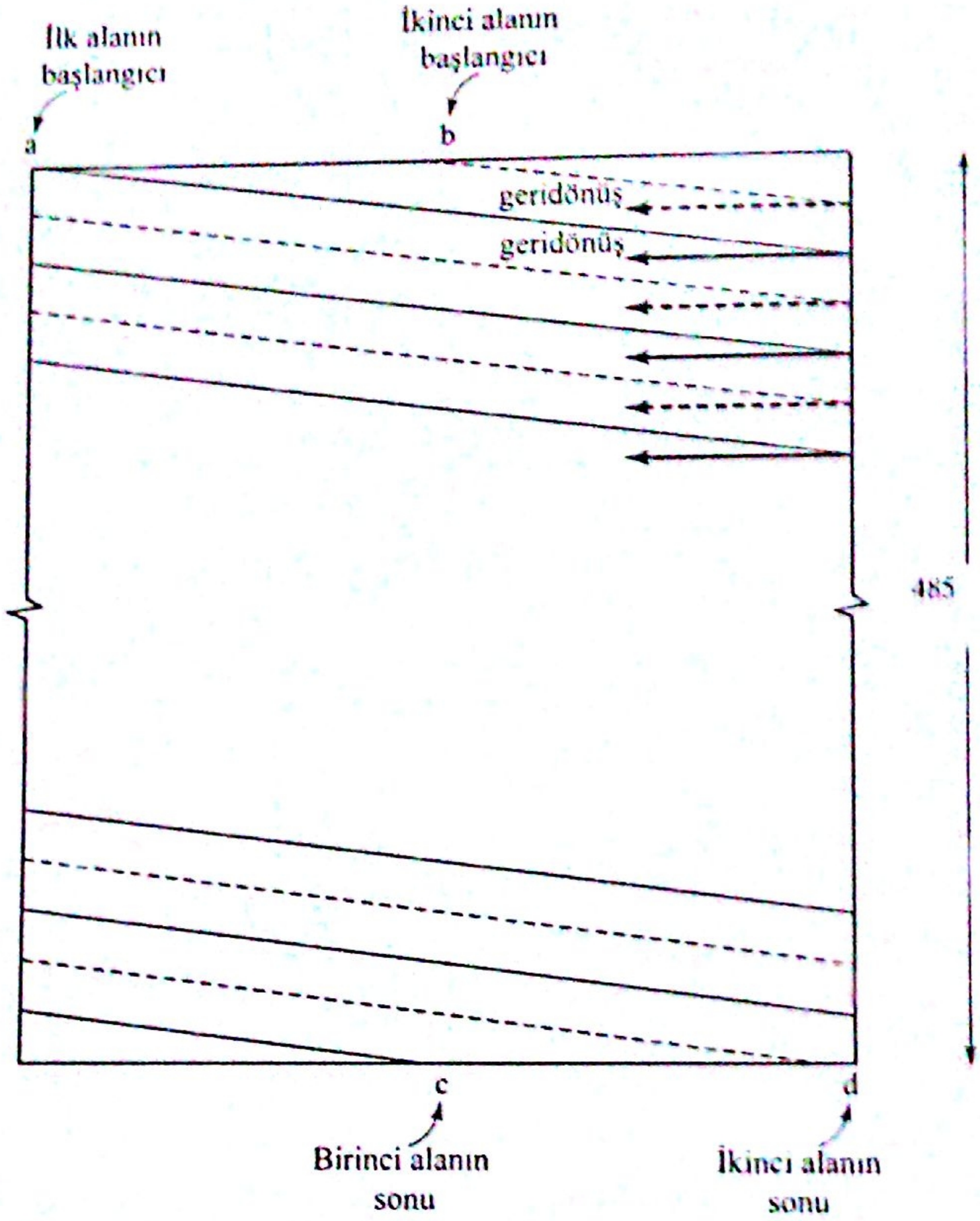


Şekil 4.19 Yatay ve dikey saptırma plakaları için işaret dalga formları

Siyah-Beyaz TV İşaretleri. TV işaret iletiminde ilk adım görüntü izgelerinin elektriksel işarete dönüştürülmesidir. İki boyutlu görüntü, görüntünün ardışıl olarak taranması ile tek boyutlu elektriksel işarete dönüştürülür ve görüntünün parlaklı seviyesi ile orantılı bir elektriksel işaret üretilir. Tarama ışığa duyarlı bir yüzeyden oluşan bir fotokatot tüp üzerine optik yöntemler ile düşürülen görüntüyü odaklanan bir TV kamerasında gerçekleştirilir.

Görüntü, görüntünün parlaklığı ile orantılı bir akım veya gerilim üreten bir elektron ışını ile taranır. Elde edilen elektriksel işaret *video işareti* olarak adlandırılır.

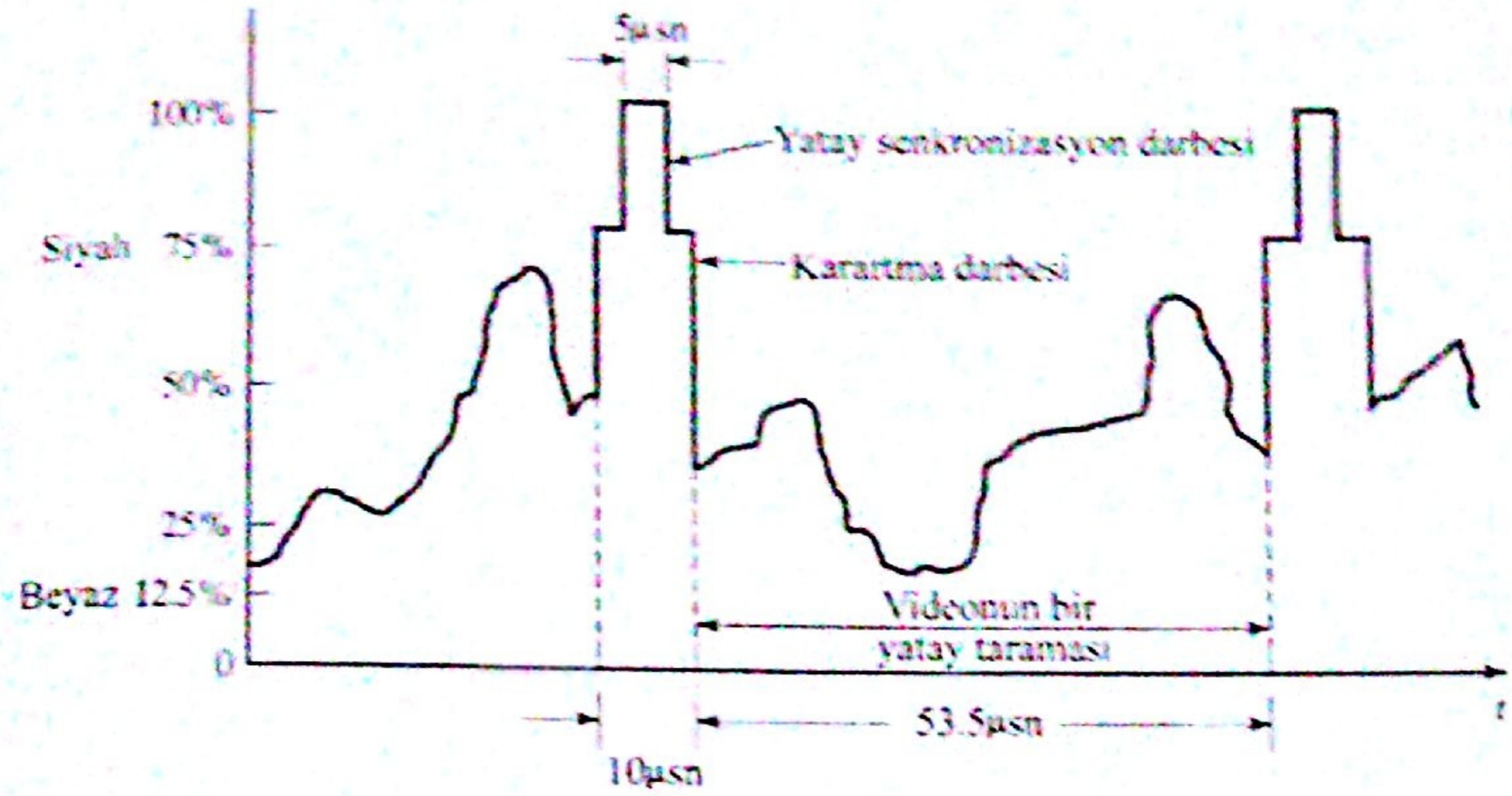
Elektron ışın taraması yatay ve dikey saptırma levhalarına uygulanan iki gerilim ile kontrol edilir. Bu iki gerilim Şekil 4.19 da gösterilmiştir. Bu tarama yönteminde, Şekil 4.20'de gösterildiği gibi, görüntü, bir *çerçeveyi* oluşturan 525 çizgiye bölünür. Elde edilen işaret saniyenin 1/30'unda iletilir. Çizgi sayısı görüntünün çözünürlüğünü belirler ve iletim hızı ile birlikte görüntünün iletilmesi için gerekli olan kanal bandgenişliğini belirler.



Şekil 4.20 Binişmesiz tarama örüntüsü

Tüm bir görüntünün saniyenin 1/30'unda iletimi ortalama izleyici için oldukça itici bir durum olan görüntü titreşimini önlemek için yeteri kadar hızlı değildir. Titreşimin önlenebilmesi için, Şekil 4.20 de gösterildiği gibi görüntü taraması binişmeli (interlaced) örüntü ile gerçekleştirilir. Binişmeli örüntü herbiri 262.5 hatta sahip iki alandan oluşur. Her alan ortalama bir göz tarafından algılabilecek titreşim oranının üzerinde, saniyenin 1/60'ında iletilir. İlk alan "*a*" noktasından başlar ve "*c*" noktasında sonlanır. İkinci alan ise "*b*" noktasından başlar ve "*d*" noktasında sonlanır.

Yatay bir hat, yatay kaydırma plakasına uygulanan testere dişi dalga formu tarafından belirlenen 53.5 μ sn'lik bir sürede taranır. Işın bir sonraki hatta ulaşmak için 10 μ sn bir süreye sahiptir. Bu aralık içerisinde, TV alıcısının ekranında geridönüş hatlarının gözükmemesi için bir karartma darbesi uygulanır. Alıcıda yatay-tarama devreci için eşzamanlılık sağlamak için 5 μ sn'lik bir darbe, karartma darbesine eklenir. Şekil 4.21'de tipik bir video işareti gösterilmiştir.



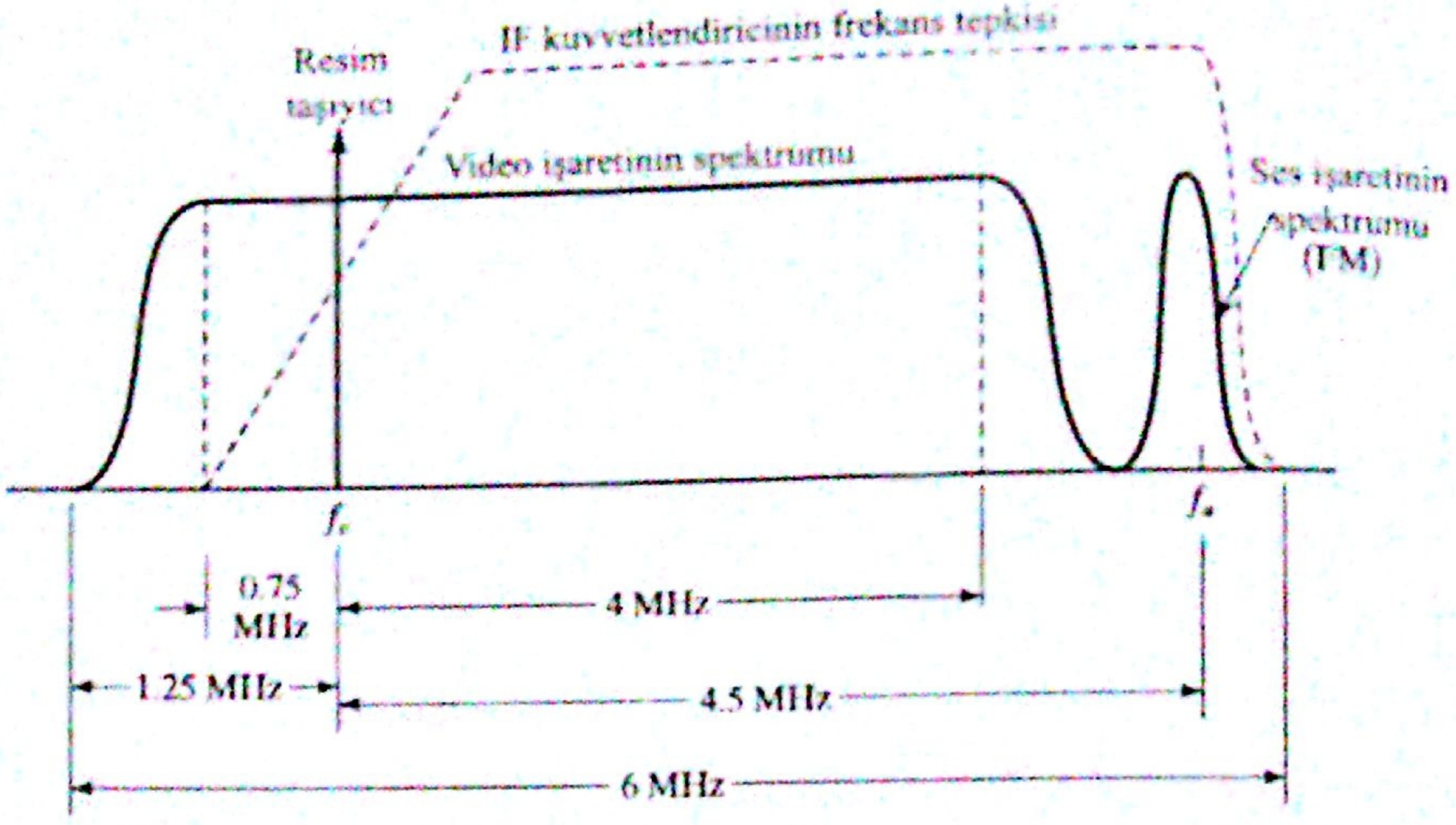
Şekil 4.21 Bir yatay tarama sonucunda elde edilen tipik bir video işareti

Bir binişmeli (interlaced) alanın iletiminden sonra, düşey saptırma plakalarına uygulanan düşey testeredişi işaret dalga formu sıfırlanır. 20 hat taramasına karşılık gelen 1.27 msn'lik geri dönüş aralığı, ışının resmin alt kısmından üst kısmına geçişine süre tanır. Bu aralık içerisinde Düşey karartma darbesi TV alıcıda geridönüş hatlarının gözükmemesi için uygulanır. Düşey geridönüş (her çerçeve için iki kez) uygulandığında, bir görüntüdeki yatay hatların gerçek sayısı 485 olur.

Video işaretinin bandgenişliği görüntünün 485 satıra karşılık $485 \times \frac{4}{3}$ sütunluk bir dikdörtgen dizi olarak ele alınması ile bulunabilir. Burada 4/3 (resmin boyunun yüksekliğine oranı olan) en-boy oranıdır. Böylece 1/30 sn'de gönderilen her çerçeve için 313,633 resim elemanı (piksel) oluşur. Bu, 5.25 MHz'e kadar frekans bileşenleri içeren işaretleri temsil edebilecek 10.5 Mhzlik bir örnekleme frekansına karşılık gelir. Ancak bir görüntüde komşu pikseller arasındaki ilinti oldukça yüksektir. Dolayısı ile video işaretlerinin bandgenişliği 5.25 MHz'den daha düşüktür. Ticari TV yayıncılığında, video işaretlerinin bandgenişliği W=4.2 MHz'e sınırlandırılmıştır.

Ticari TV yayıncılığı için tahsis edilmiş bandgenişliği 6 MHz olduğunda, ÇYB iletiminin mümkün olmadığı görülmektedir. Ayrıca video işaretinin büyük oranda düşük frekans içeriğine sahip olması da TYB'in pratik modülasyon yöntemi olarak kullanılmasına imkan vermez. Dolayısı ile AYB geriye kalan tek görünür alternatiftir. Büyük bir taşıyıcı bileşen içermesinden dolayı, AYB işaret bir zarf detektörü kullanılarak basitçe demodüle edilebilir. Bu tip bir detektör alıcıların uyarlanmasını büyük oranda basitleştirir.

İletilen video işaretleri tarafından kapsanan frekans aralığı Şekil 4.22'de gösterilmiştir. Görüleceği gibi video işaretinin tam bir üst yanbandı (4.2 MHz) alt yanbandın küçük bir kısmı ile birlikte (1.25 MHz) iletilmektedir. Altbölüm 3.2.4'de açıklanan geleneksel AYB spektral şekillendirmenin aksine f_c ve f_c – *0.75* MHz frekans aralığındaki alt yanband işaret herhangi bir zayıflatma olmadan iletilmektedir. f_c – *1.25* MHz den f_c-*0.75* MHz'e kadar olan aralıktaki frekanslar Şekil 4.22'de gösterildiği gibi zayıflatılır, ve f_c – 1.25 MHz'den daha altta olan tüm frekans bileşenleri tamamen bloklanmaktadır.



Şekil 4.22 Siyah-Beyaz televizyon işaretinin spektral karakteristiği

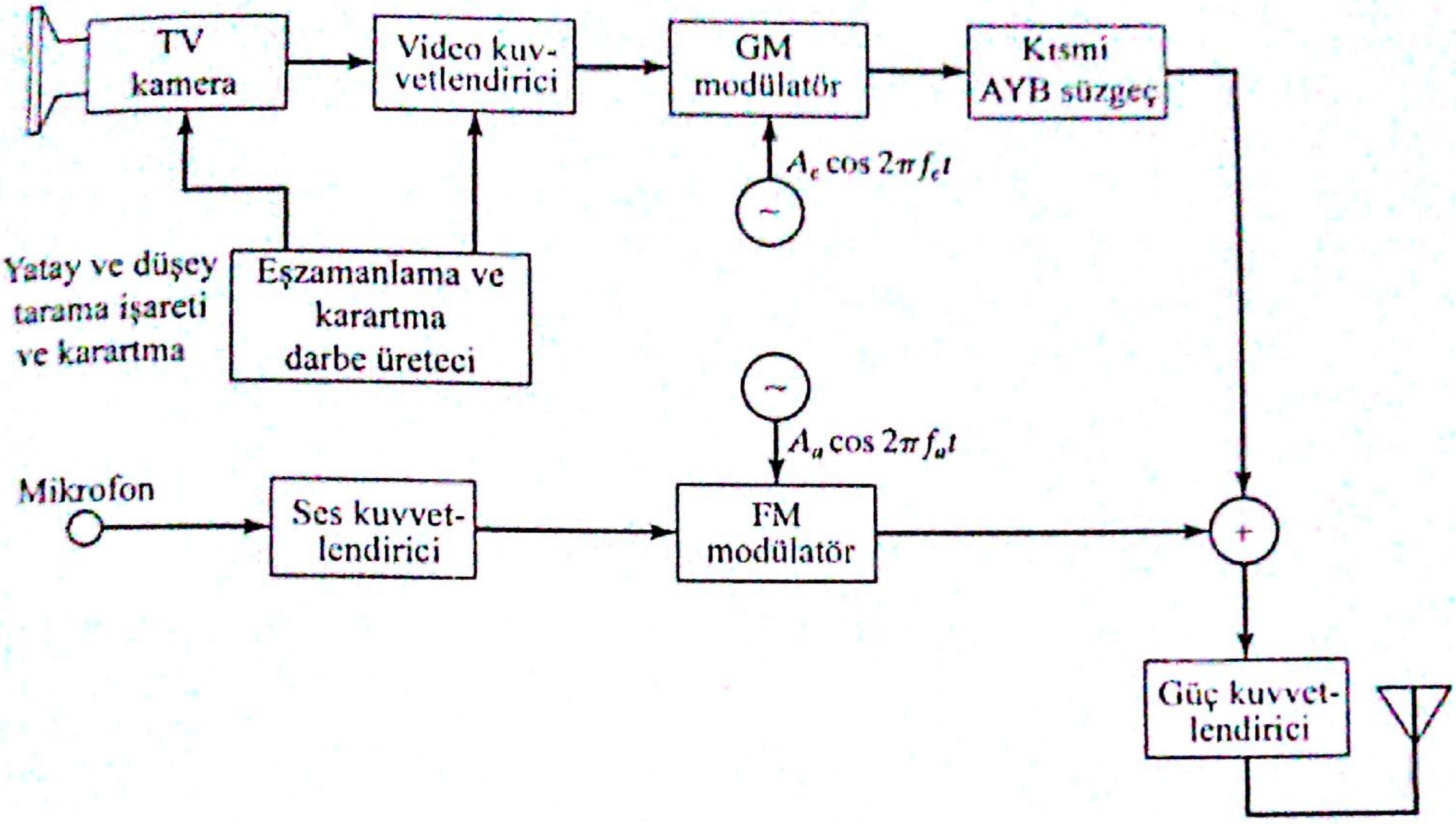
AYB spektral şekillendirme alıcının IF kuvvetlendiricisinde gerçekleştirilir.

Video işaretlerine ek olarak, TV işaretlerinin ses kısmı f_c + 4.5 MHz frekansındaki bir taşıyıcının frekans modülasyonu kullanılarak iletilmektedir. Ses işareti bandgenişliği W = 10 kHz'e sınırlandırılmıştır. FM modülasyonlu işarette frekans sapması 25 kHz ve FM işart bandgenişliği 70 kHZ olarak seçilmiştir. Dolayısı ile video ve ses işaretlerini iletmek için gerekli olan toplam kanal bandgenişliği 5.785 MHz'dir.

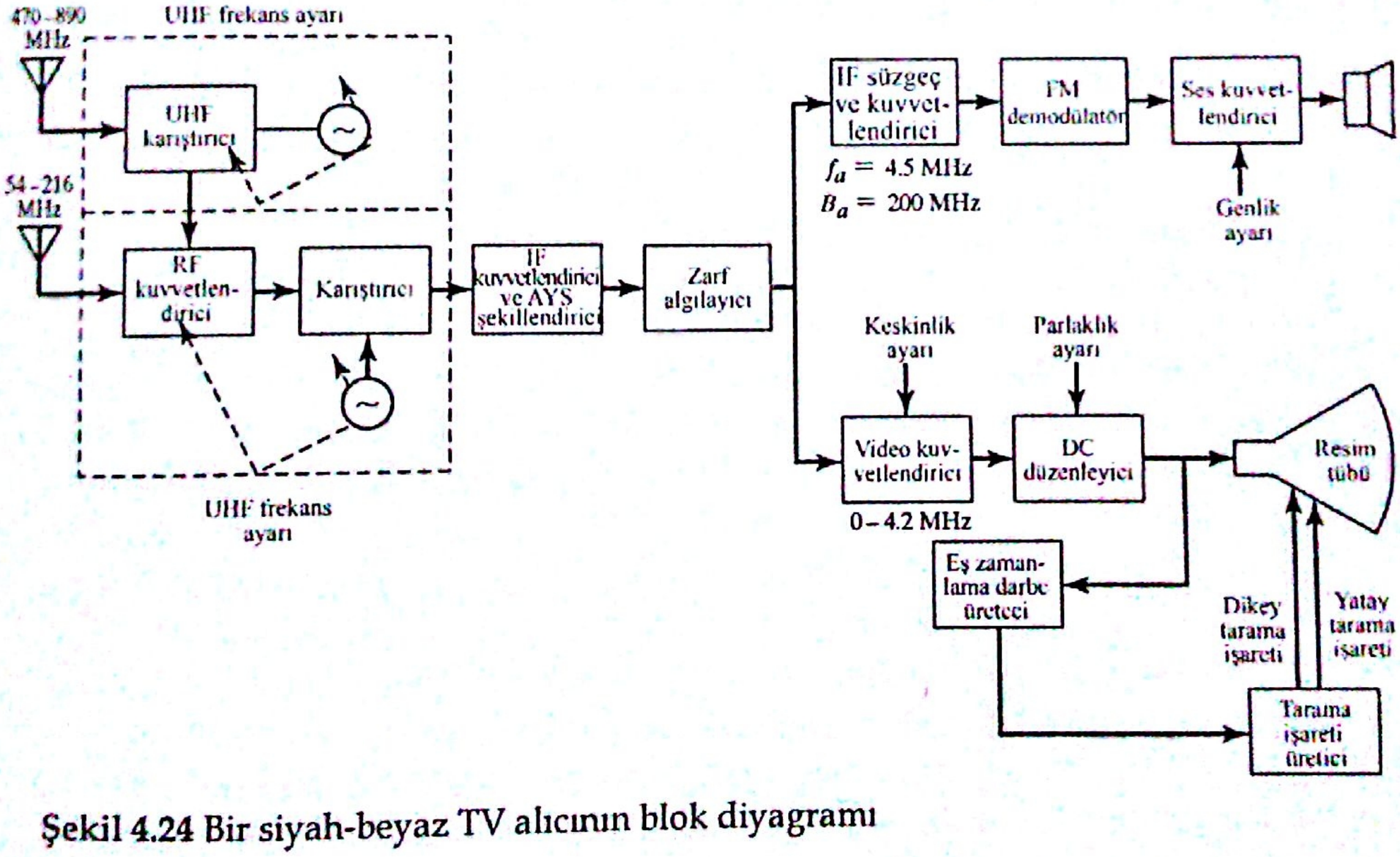
Şekil 4.23 bir siyah-beyaz TV vericinin blok diyagramını göstermektedir. İlgili TV alıcı ise Şekil 4.24'de verilmiştir. Biri UHF diğeri ise VHF bandı için iki farklı frekans ayarlayıcı vardır. UHF bandındaki TV işaretleri bir UHF mikseri sayesinde VHF bandına çekilir. Bu frekans dönüşümü her iki frekans bandı için bir tek ortak RF kuvvetlendirici kullanımını mümkün kılar. Daha sonra tuner tarafından seçilen video işaretleri 41-47 MHz aralığındaki ortak IF frekans bandına ötelenir. IF kuvvetlendirici aynı zamanda işaret algılanmasından önce gerekli olan AYB şekillendirme işlemini gerçekleştirir. IF kuvvetlendiricinin çıkışı temel band işareti üretmek için elde edilen zarftır.

İşaretin 4.5 MHz merkezinde yerleşmiş olan ses kısmı ise bir I_f süzgeç-kuvvetlendirici ile süzgeçlenir ve FM demodülatöre verilir. Demodülasyonu gerçekleştirilen ses bandı işareti bir ses kuvvetlendiricisine verilier ve bu kuvvetlendiricinin çıkışı hoparlörü sürer.

Temel band işaretin video içeriği 0-4.2 MHz aralığındaki frekans bileşenlerini geçiren bir video kuvvetlendiriciyi sürer. Bunun çıkışı, karartma darbelerini kesen ve doğru bir DC seviyeyi belirleyen, bir DC düzenleyiciye verilir. DC olarak düzenlenmiş video işaretleri daha sonra resim tüpünü beslemek için kullanılır. Alınan video işaretinde mevcut eşzamanlama darbeleri ayrıştırılır ve yatay ve dikey tarama üreteçlerine uygulanır.



Şekil 4.23 Bir siyah-beyaz TV vericinin blok diyagramı



Şekil 4.24 Bir siyah-beyaz TV alıcının blok diyagramı

Uyumlu Renkli Televizyon. Bir görüntüde mevcut olan renk bilgisinin iletimi piksel renklerinin temel renklere ayrıştırılması ve bu renklere ilişkin elektriksel işaretlerin iletimi ile gerçekleştirilebilir. Genel olarak, tüm doğal renkler üç temel renk-gin-mavi, yeşil ve kırmızı- uygun karışımı ile elde edilebilir. Sonuç olarak, eğer biri

mavi süzgece sahip, diğeri yeşil süzgece sahip ve bir diğeri de kırmızı süzgece sahip üç kamera kullanılır ve renkli görüntüyü gören bu üç kamera tarafından üretilen üç elektriksel işaret iletilir ise, alınan işaret orijinal renkli görüntünün yeniden üretilmesi için birleştirilebilir.

Bu tür bir iletim düzeni iki temel dezavantaja sahiptir. İlki, siyah-beyaz televizyona göre üç kat bandgenişliği gerektirir. İkinci olarak, iletilen renkli TV işareti siyah-beyaz(tek renk) TV alıcılar tarafından alınamaz.

1953 yılında ABD'de geliştirilen NTSC standardı bu iki problemi üç temel renk işaretinin bir karışımını ileterek aşmaktadır. Özellikle, standart renkli TV sistemlerinde iletilen üç işaret aşağıda verilen üç doğrusal olarak bağımsız kombinasyondan oluşur:

$$\begin{aligned} m_L(t) &= 0.11m_b(t) + 0.59m_g(t) + 0.30m_r(t) \\ m_I(t) &= -0.32m_b(t) - 0.28m_g(t) + 0.60m_r(t) \\ m_Q(t) &= 0.31m_b(t) - 0.52m_g(t) + 0.21m_r(t) \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

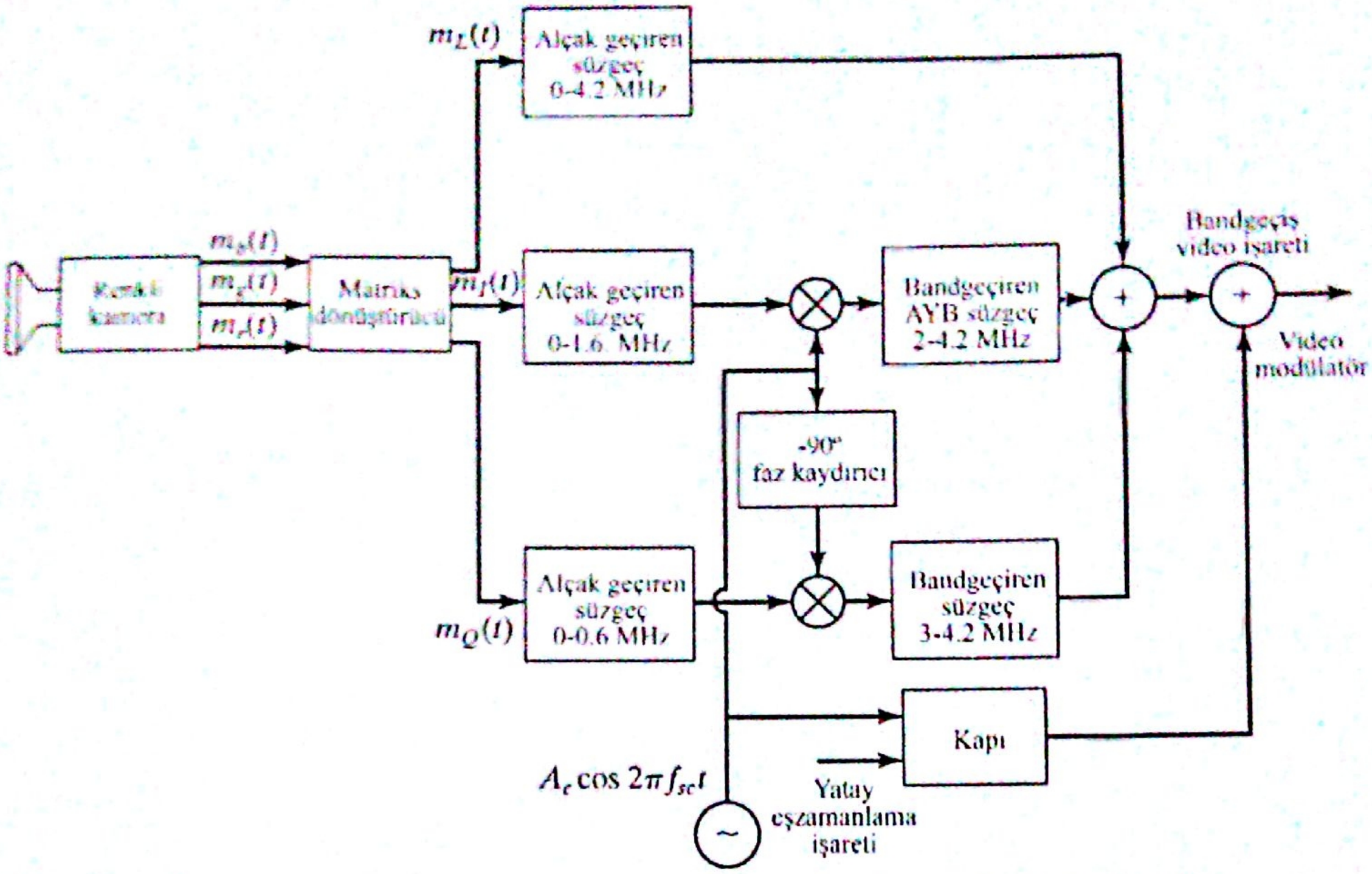
iletilecek üç yeni işareti $m_L(t)$, $m_I(t)$ ve $m_Q(t)$ türeten dönüşüm matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 0.11 & 0.59 & 0.30 \\ -0.32 & -0.28 & 0.60 \\ 0.31 & -0.52 & 0.21 \end{bmatrix} \tag{4.4.2}$$

tekil değildir ve alıcıda, $m_b(t)$, $m_g(t)$ ve $m_r(t)$ temel renkleri $m_L(t)$, $m_I(t)$ ve $m_Q(t)$'den yeniden elde etmek için kullanılır.

$m_L(t)$ işareti limunans (ışıklılık) işareti olarak isimlendirilir. Bu işarete 4.2 MHz bandgenişliği tahsis edilmiştir ve tekrenk TV iletiminde olduğu gibi AYB-GM ile iletilir, Bu işaret tek renk bir alıcı tarafından alındığında, sonuç renkli görüntünün geleneksel siyah-beyaz versiyonu olacaktır. Böylece, $m_L(t)$'in iletimi ile tek renk TV yayıncılığı ile uyumluluk elde edilmiş olunur. Geriye bir renkli TV alıcı tarafından renkli görüntünün yeniden oluşturulabilmesi için gerekli ekstra bilginin iletimi problemi kalmaktadır. $m_I(t)$ ve $m_Q(t)$ bileşik renk işaretlerinin, $m_L(t)$ ile herhangi bir karışıma neden olmadan, $m_L(t)$ gibi aynı bandgenişliğinde iletilebileceği dikkat çekicidir.

$m_I(t)$ ve $m_Q(t)$, işaretleri renklilik (chrominance) işareti olarak adlandırılır; bunlar renklerin renk tonu (hue) ve doygunluğu (saturation) ile ilişkilidir. Deneysel olarak gerçekleştirilen öznellik testleri insan görmesinin $m_I(t)$ ve $m_Q(t)$, işaretlerindeki kısa süreli ve resmin küçük bölümünde meydana gelen değişimleri algılayamadığını göstermiştir. Bu $m_I(t)$ ve $m_Q(t)$, işaretlerindeki yüksek frekans içeriğinin yeniden oluşturulan görüntünün kalitesinde herhangi ciddi bir kayıba uğramadan elimine edilebileceğini ima etmektedir. Bunun sonucu olarak iletimden önce $m_I(t)$ 1.6 MHz'lik bir bandgenişliği ile ve $m_Q(t)$ 0.6 MHz'lik bir bandgenişliğine sınırlandırılmıştır. Bu iki işaret Şekil 4.25'de gösterildiği gibi $f_{sc} = f_c + 3.579545$ MHz alt taşıyıcı frekansı üzerine dik-taşıyıcılı çoğullanmıştır. $m_I(t)$ işareti 4.2 MHz üzerindeki üst yanbandın bir kısmını yok eden bir AYB süzgeçten geçirilir.



Şekil 4.25 Temel renk işaretlerinin iletimi ve renk ve ışıklılık işaretlerinin çoğullaması

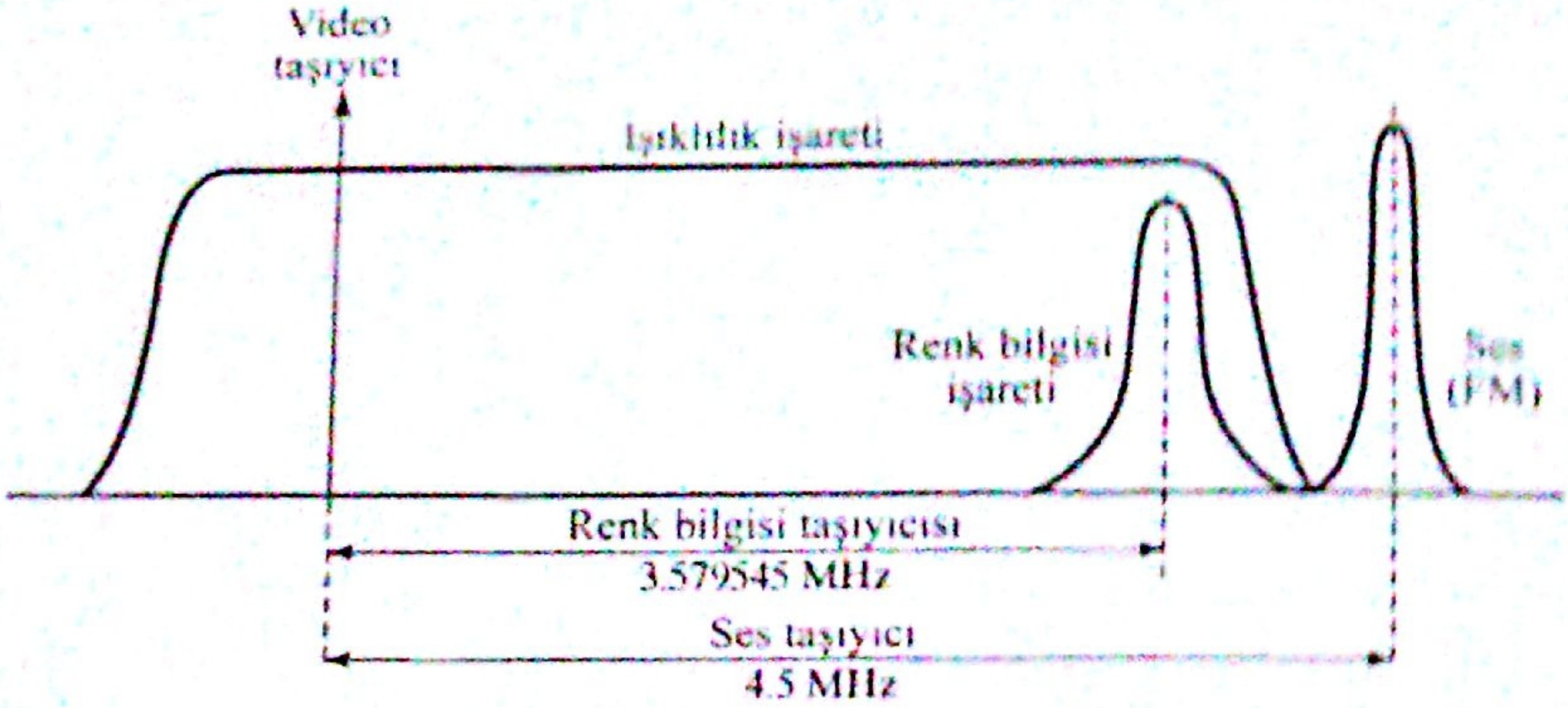
$m_Q(t)$ ÇYB-TB genlik modülasyonu ile iletilir. Bundan dolayı, bileşik video işareti

$$m(t) = m_L(t) + m_Q(t)\sin 2\pi f_{sc}t + m_I(t)\cos 2\pi f_{sc}t + \hat{m}'_I(t)\sin 2\pi f_{sc}t \qquad (4.4.3)$$

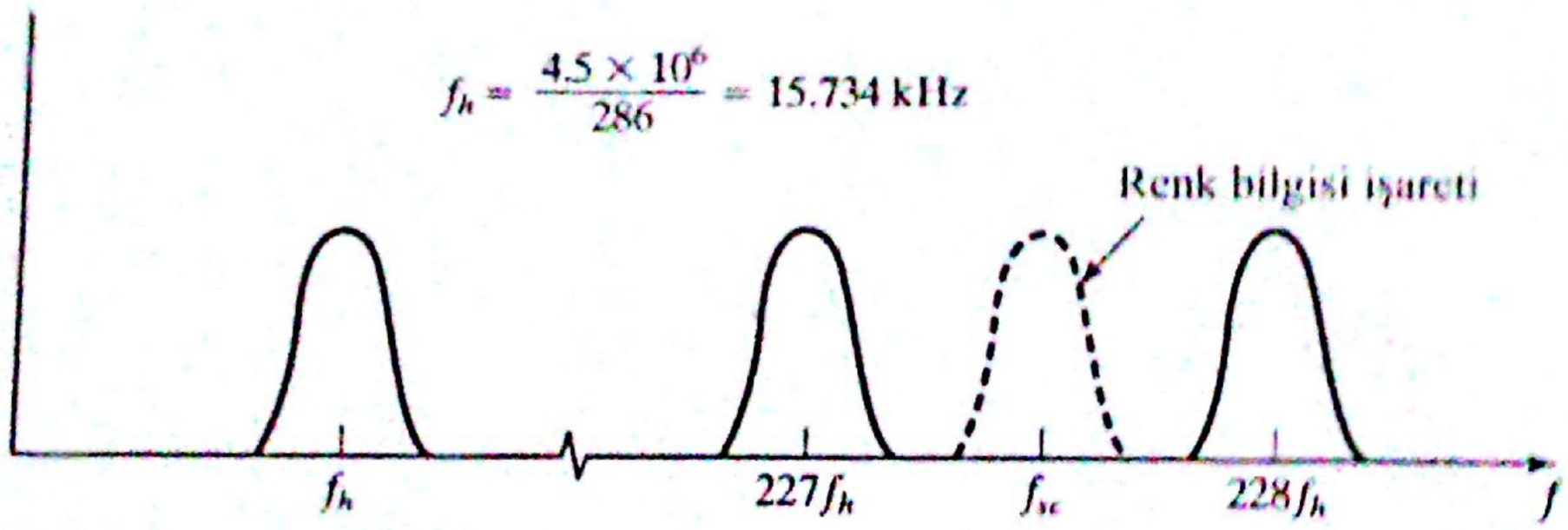
şeklinde ifade edilir. Denklem (4.4.3.)'deki $m_I(t)$ ve $\hat{m}'_I(t)$ ile ilişkili son iki terim, renk bilgisi $m_I(t)$ işareti için AYB-GM işaretini oluşturur. Bileşik işaret $m(t)$ Şekil 4.26 da gösterildiği gibi 6 MHz bandgenişliğinde bir AYB artı taşıyıcı ile iletilir.

Işıklılık işareti $m_L(t)$'nin spektrumu, yatay tarama frekansı f_h'nın harmonikleri arasında boşluk içerir. Renkli TV'de f_h 4.5 MHz/286'dır. Renk bilgisi işaretinin iletimi için alt taşıyıcı frekansı f_{sc} = 3.579545 $m_L(t)$ spektrumundaki bu boşluklardan birine gelecek şekilde seçilmiştir. Daha belirgin olarak, bu frekans f_h'ın 227. ve 228. harmonikleri arasına düşer. Böylece, renk bilgisi işaretleri Şekil 4.27'de gösterildiği gibi frekans düzleminde ışıklılık işareti ile binişlendirilmiştir (interlaced). Bunun bir sonucu olarak, renk bilgisi işaretlerinin ışıklılık işareti üzerindeki etkisi insan görme sisteminin ataletinden dolayı insan gözü tarafından algılanamaz. Bundan dolayı renk bilgisi işaretleri hem tek renk TV alıcılarda ve hem de renkli TV alıcılarda ışıklılık işaretinin demodulasyonu ile karışıma girmezler.

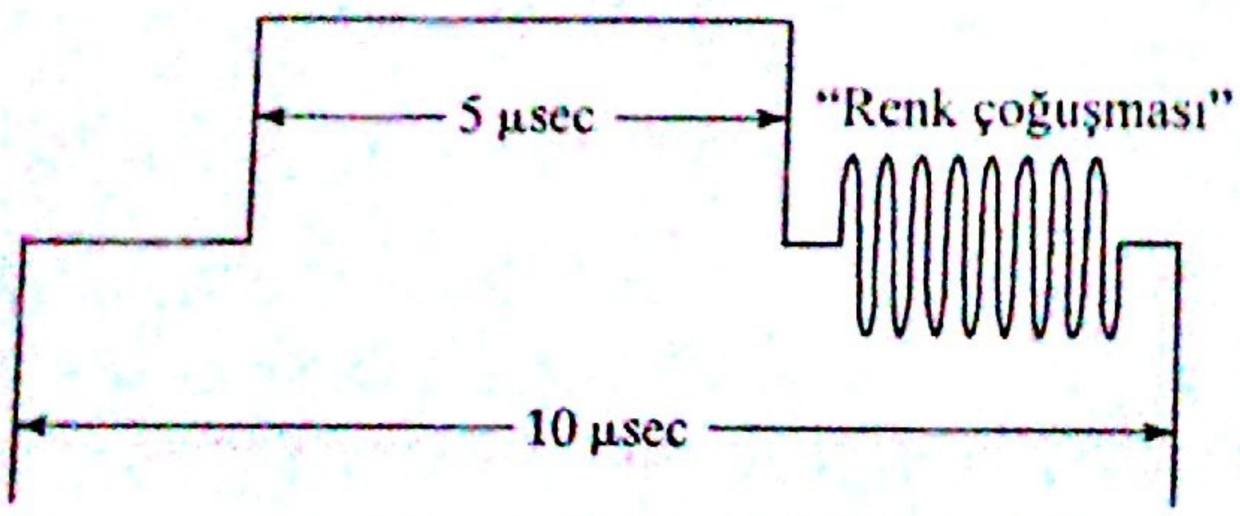
Yatay ve dikey eşzamanlı darbeler vericide $m(t)$ işaretine eklenir. Ayrıca "renk patlaması" olarak adlandırılan $A_c \cos 2\pi f_{sc}t$ renk alt taşıyıcısının sekiz salınımı,



Şekil 4.26 Renkli TV işaretinin spektral karakteristiği



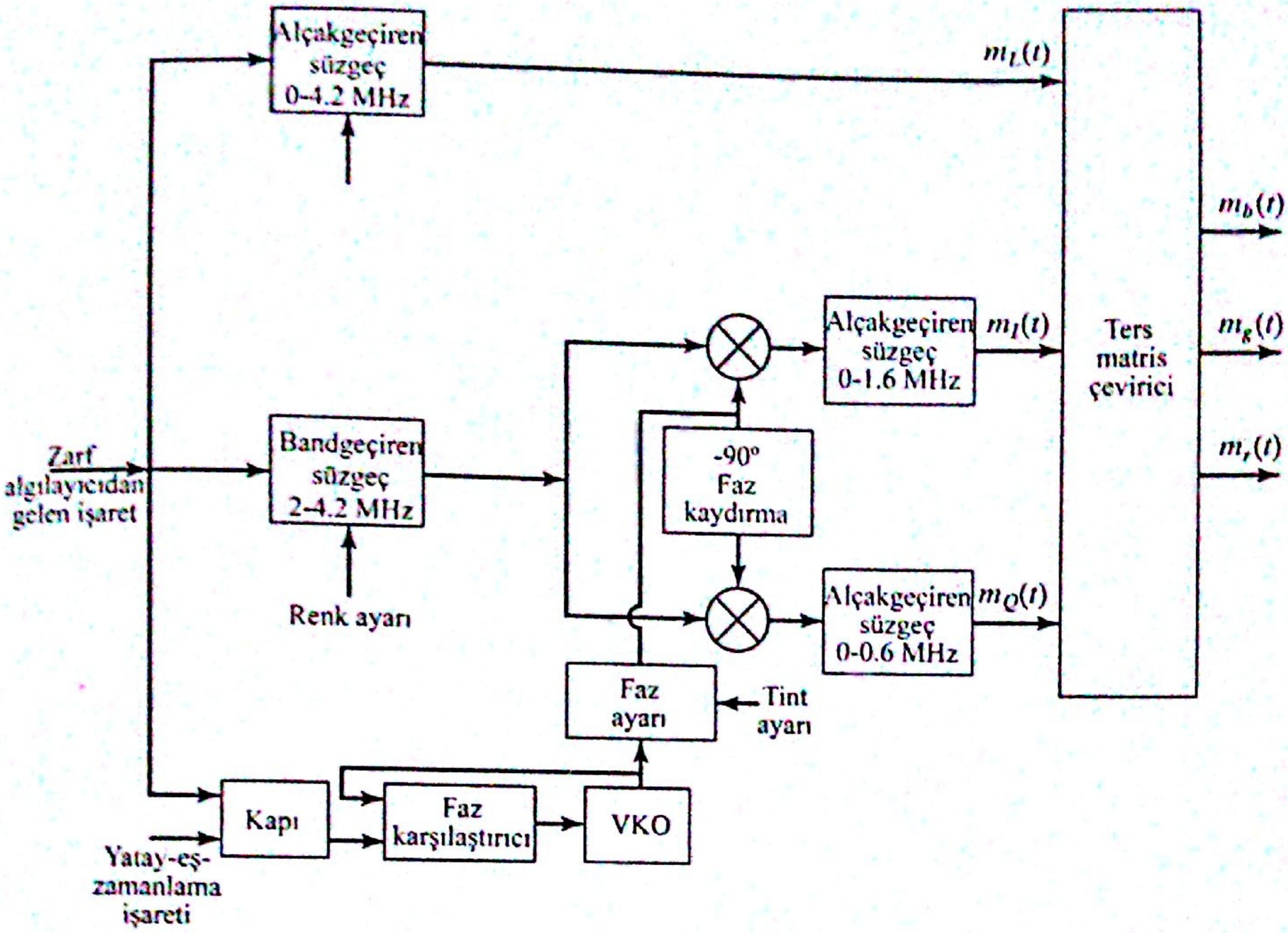
Şekil 4.27 Renk işaretleri ile ışıklılık işaretlerinin birleşlemesi (interlacing)



Şekil 4.28 Renk alttaşıyıcısı ile karartma darbesi

Şekil 4.28'de gösterildiği gibi karartma darbesinin izleyen kenarına yerleştirilir. Bu alıcıda alt taşıyıcı faz eşzamanlılığı için kullanılabilecek bir işaret sunar.

Renkli TV alıcının ön ucu, 6 MHz AYB işareti temelband işarete dönüştüren zarf detektörüne kadar tek renk alıcının önucu ile benzerlik gösterir. Renkli TV alıcıdaki geriye kalan çoğullama çözme (demultiplexing) işlemi Şekil 4.29'da gösterilmektedir. Burada ışıklılık işareti $m_L(t)$'in tekrar elde edilmesi için 4.2 MHz'lik bir alçakgeçiren süzgecin kullanıldığına dikkat ediniz. Renk bilgi işaretleri bandgeçiren süzgeçleme ve herbir yatay taramada iletilen renk taşıyıcı frekans patlamasına kilitlenmiş bir VCO çıkışını kullanan dik-taşıyıcı demodülatörü tarafından demodüle edilerek elde edilir.



Şekil 4.29 Bir renkli TV alıcıda çoğullama çözücü ve ışıklılık ve renk bilgi işaretlerinin demodülasyonu

Demodüle edilmiş olan renk bilgi işaretleri alçak geçiren süzgeçten geçirilir ve ışıklılık işareti ile birlikte üç renk işaretini $m_b(t)$, $m_g(t)$ ve $m_r(t)$ üreten "ters matris" dönüştürücüsüne iletilir, yani

$$\begin{bmatrix} m_b(t) \\ m_g(t) \\ m_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 & -1.10 & 1.70 \\ 1.00 & -0.28 & -0.64 \\ 1.00 & -0.96 & 0.62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_L(t) \\ m_I(t) \\ m_Q(t) \end{bmatrix} \tag{4.4.4}$$

Oluşan renk işaretleri, bir renkli resim tüpünde mavi, yeşil ve kırmızı pikselleri belirleyen üç elektron tabancısını kontrol eder. Gerçi renkli resim tüpleri çok farklı şekillerde imal edilseler bile, bir renk maske tüpü genellikle kullanılır. Resim tüpünün yüzeyi fosfor matris noktalarından oluşur. Bu matris her bir grupta üç temel renge karşılık gelen üç nokta içerir. Her bir nokta renk grubunun ardında, delik içeren bir maske vardır; her bir grup için bir delik mevcuttur. Üç elektron tabancası, her biri bu üç tip renk noktasından birini uyaracak şekilde ayarlanmıştır. Böylece her üç renk noktası renkli görüntü oluşturmak için eş zamanlı olarak farklı yoğunlukta uyarılır.

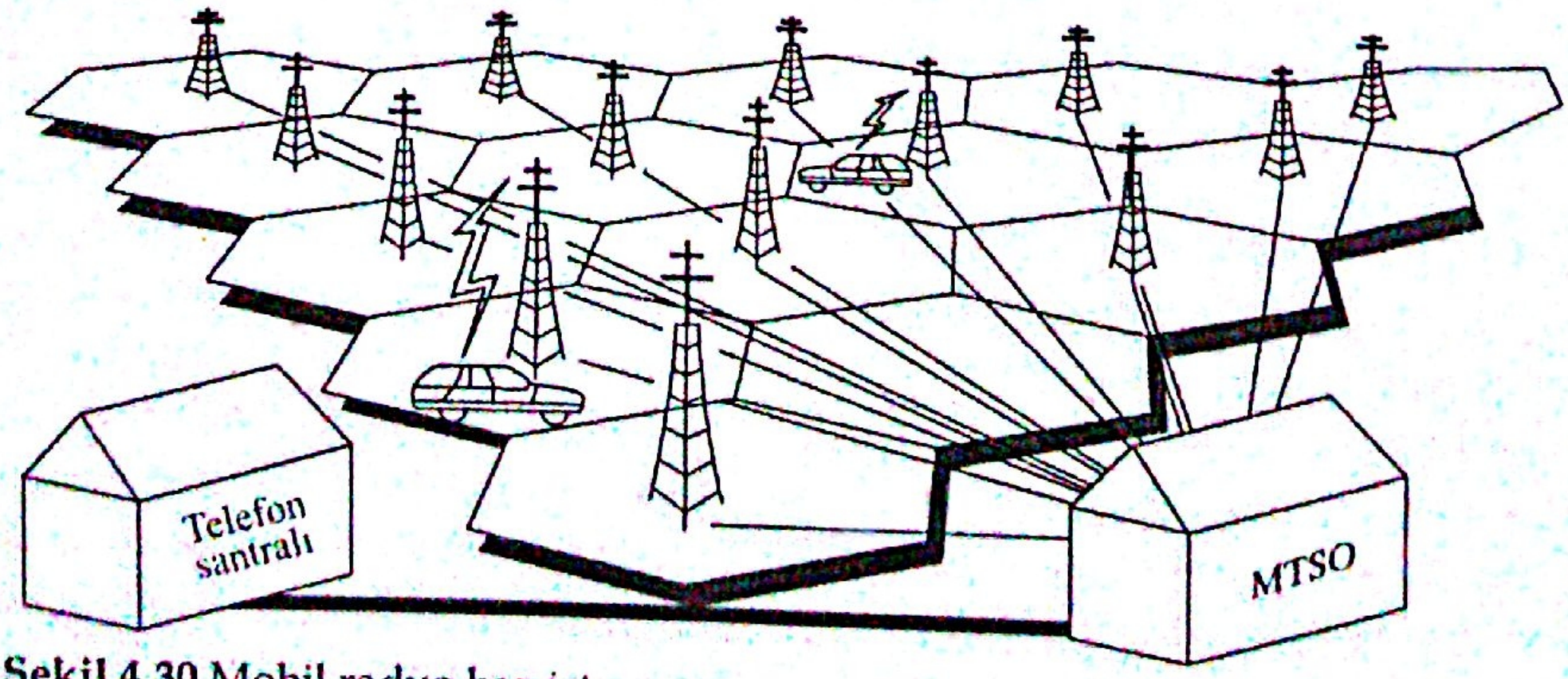
4.5 CEP TELEFONU SİSTEMLERİ

Otomobil, otobüs, tren ve uçak ile yolculuk yapan insanlara telefon servisi sunma talebini son otuz kırk yıl içerisinde sürekli olarak artmaktadır. Bu talebi karşılamak için, radyo-iletişim sistemleri cep telefonlarını karasal telefon ağına bağlamak için geliştirilmiştir. Günümüzde, radyo temelli sistemler uçak ve motorlu araçlar ile yolculuk eden insanların telefon ile haberleşmesini mümkün kılmaktadır. Bu altbölümde kısaca, insanlara elde taşınabilir veya araç telefonları ile telefon servisi sağlayan cep telefon sistemleri tanımlanacaktır.

Herhangi bir radyo iletişim sisteminin kurulması ile ilgili temel problem kullanıma uygun radyo spektrum bölgesinin müsait olmasıdır. Radyo telefon sistemleri açısından, Amerika Birleşik Devletlerinde Federal İletişim Komisyonu (FİK: Federal Communication Commission-FCC) 806-890 MHz UHF frekans bandında bir kısmı bu amaç için tahsis etmiştir. Benzer şekilde Avrupa ve Japonya'da UHF bandında benzer frekans tahsisleri yapılmıştır.

Cep telefonu kavramı, özellikle cep telefon servislerine olan talebin çok fazla olduğu yüksek nüfus yoğunluklu yerleşim bölgelerinde müsait frekans spektrumunun etkin kullanımı için bir metod olarak geliştirilmiştir. Bir coğrafik alan, Şekil 4.30'da görüldüğü gibi, her biri bir *baz istasyonu* içeren, küçük hücrelere bölünmüştür. Her bir istasyon telefon hatları ile *mobil telefon anahtarlama ofisine (mobile-telephone switching office MTSO)* bağlıdır. Bunlar ise yine telefon hatları vasıtası ile karasal telefon ağınının merkez ofisine (MO: *Central Office- CO)* bağlıdır.

Bir mobil kullanıcı radyo sayesinde her bir hücredeki baz istasyonu ile haberleşir. Baz istasyonu çağrıyı MTSO üzerinden bir başka baz istasyonuna (eğer çağrıyı yapan kişi bir başka hücrede bulunuyor ise) veya karasal telefon ağının merkez ofisine (eğer aranan kişi mobil değil ise) aktarır. Her bir mobil telefon bir telefon numarası ve telefon üreticisinin belirlemiş olduğu bir telefon seri numarası ile tanılanır. Bu numaralar bir çağrının başlatılması esnasında yetkilendirilmek veya faturalandırılmak için otomatik olarak MTSO'a aktarılır.



Şekil 4.30 Mobil radyo baz istasyonu

Bir mobil telefon kullanıcı aramak istediği telefon numarasını tuşlayarak ve "cağrı" butonuna basarak bir telefon çağrısı başlatır. MTSO mobil kullanıcının yetkilendirilmesini kontrol eder ve mobil telefondan baz istasyonuna ses işaretinin iletişimini sağlamak için müsait frekans kanalını atar. Kanal ataması mobil telefona bir gözlemci kontrol kanalı ile gönderilir. İkinci bir kanal baz istasyonundan mobil telefona iletişim için atanır. Bu iki kesim arasındaki eş zamanlı iletişim *tam çift yönlü iletişim (full duplex)* olarak adlandırılır. MTSO aranan kişi ile bağlantının tamamlanabilmesi için telefon ağı merkez ofisine bağlanır. MTSO ve telefon ağı arasındaki tüm telefon haberleşmesi geniş band ana hatlar (trunk lines) üzerinden gerçekleştirilir. Telefon çağrısının son bulması ile her iki kesim telefonu kapatır ve radyo kanalı bir başka kullanıcının kullanımı için müsait duruma gelir.

Telefon çağrısı esnasında, MTSO kullanıcıdan baz istasyonu arasındaki radyo iletişimimin işaret gücünü gözlemler. Eğer işaret gücü daha önceden belirlenmiş bir eşiğin altına düşer ise, MTSO bu mobil kullanıcının başlangıç hücresinden bir başka hücreye doğru hareket ettiğinin bir işareti olarak algılar. Komşu hücrelerdeki baz istasyonu ile haberleşerek, MTSO daha kuvvetli bir işaret alan komşu hücreyi bulur ve otomatik olarak mobil kullanıcıyı komşu hücrenin baz istasyonuna aktarır. Bu aktarma işlemi saniyenin küçük bir diliminde gerçekleşir ve genellikle telefon görüşmesi yapan her iki kesim bunun farkında olmaz.

Mobil kullanıcı ile baz istasyonu arasında ses bandındaki ses işaretlerinin radyo ile analog iletişiminde, 3 kHz genişliğinde ses işareti FM ile 30 kHz'lik bir kanal bandgenişliği kullanılarak iletilir. Bu yaklaşık bandgenişliğinin 10 kat genişlemesi anlamına gelir. Böylesi büyük bir band genişlemesi FM demodülatörün çıkışında yeterli büyüklükte bir İGO (SNR) elde etmek için gereklidir. Ancak FM'in kullanımı radyo frekans spektrumunun hoyratça harcanmasına neden olur. Yeni tip cep telefonları sayısallaştırılarak, Bölüm 12'de anlatılan ses-model parametrelerinin LPC kodlama ve vektör nicemleme (kuantalama) temelli sıkıştırılmış (10,000 bps'lik bir hızda) sesin sayısal iletişimini kullanırlar. Cep telefonları sayısal iletişim sayesinde aynı kanal bandgenişliğinde eş zamanlı kullanıcıların sayısında 4- ila 10 katlık bir artışı karşılayabilir.

Hücresel telefon sistemlerinde, baz istasyonunun ve mobil kullanıcıların iletim gücünün komşu hücreleri etkilemeyecek şekilde yeteri kadar küçük olarak tasarlanmıştır. Bu tasarım komşu hücrelerin ötesindeki diğer hücrelerde frekansların yeniden kullanılabilmesini sağlar. Dolayısı ile hücreleri küçülterek ve yayılan gücü azaltarak, frekans yeniden kullanımını artırılabilir ve böylece bandgenişliği verimliliği ve mobil kullanıcı sayısı artar. Şu anki hücresel sistemler 5-18 km çapında hücreler kullanmaktadır. Baz istasyonu normal olarak 35 watt veya daha az bir güç seviyesinde iletim yapar iken mobil kullanıcılar ise yaklaşık olarak 3 wattan daha az bir güç seviyesinde iletim yapar. Sayısal iletişim sistemleri düşük güç seviyelerinde güvenli olarak iletişim yapma yeteneğine sahiptir.

Hücresel radyo kavramı düşük güçte elde taşınır radyo verici ve alıcıları gibi farklı tipteki kişisel haberleşme servislerini kapsayacak şekilde genişlemektedir.

Bu yeni ortaya çıkan haberleşme sistemleri oldukça düşük güç tüketen ve göreceli olarak pahalı olmayan küçük ve güçlü entegre devrelerin üretimindeki hızlı gelişme sayesinde mümkün hale gelmiştir. Bunun bir sonucu olarak 21. Yüzyılda haberleşme endüstrisinde heyecan verici yeni gelişmeleri denemeye devam edeceğiz

4.6 İLAVE KAYNAKLAR

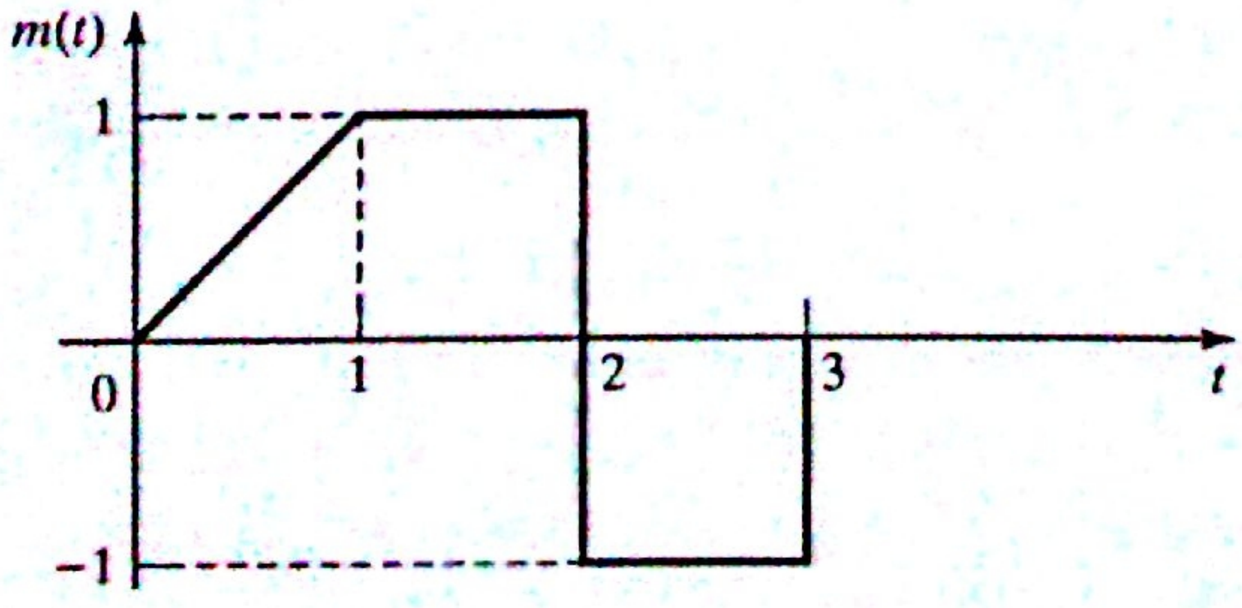
Temel haberleşme teorisi temelinde analog haberleşme sistemleri Sakrison(1968), Shanmugam (1979), Carlson (1986), Stremler (1990) Ziemer ve Tranter (2002), Couch (1993), Gibson (1993), Ziemer ve Tranter(1988) ve Haykin (2000) gibi kaynaklarça işlenmektedir. Analog iletişim sistemlerinin uyarlanması Clarke ve Hess (1971) tarafından ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

PROBLEMLER

4.1 $m(t) = 10\sin c(400t)$ mesaj işareti $c(t) = 100\cos 2\pi f_c t$ taşıyıcısını modüle etmektedir. Modülasyon indeksi 6 dır.

1. Modüle edilmiş $u(t)$ işareti için bir ifade yazınız
2. Modüle edilmiş işaretin maksimum frekans kayması nedir?
3. Modüle edilmiş işaretin güç içeriği nedir?
4. Modüle edilmiş işaretin bandgenişliğini bulunuz.

4.2 $m(t)$ işareti aşağıda Şekil P-4.2'de gösterilmiştir. Bu işaret bir taşıyıcının frekans modülasyonu ve faz modülasyonu için kullanılmıştır.



Şekil P-4.2

1. k_p ve k_f arasında öyle bir ilişki bulunuz ki modüle edilmiş işaretlerin maksimum fazı her iki durumda da eşit olsun.
2. Eğer $k_p = f_d = 1$ ise her bir durumda maksimum ani frekans nedir?

4.3 FM ve FzM modülasyonlu işaretlerin aynı faz ve dik faz bileşenleri ile zarf ve fazını belirleyin.

4.4 Bir açı modülasyonlu işaret

$$u(t) = 100\cos\left[2\pi f_c t + 4\sin 2000\pi t\right]$$

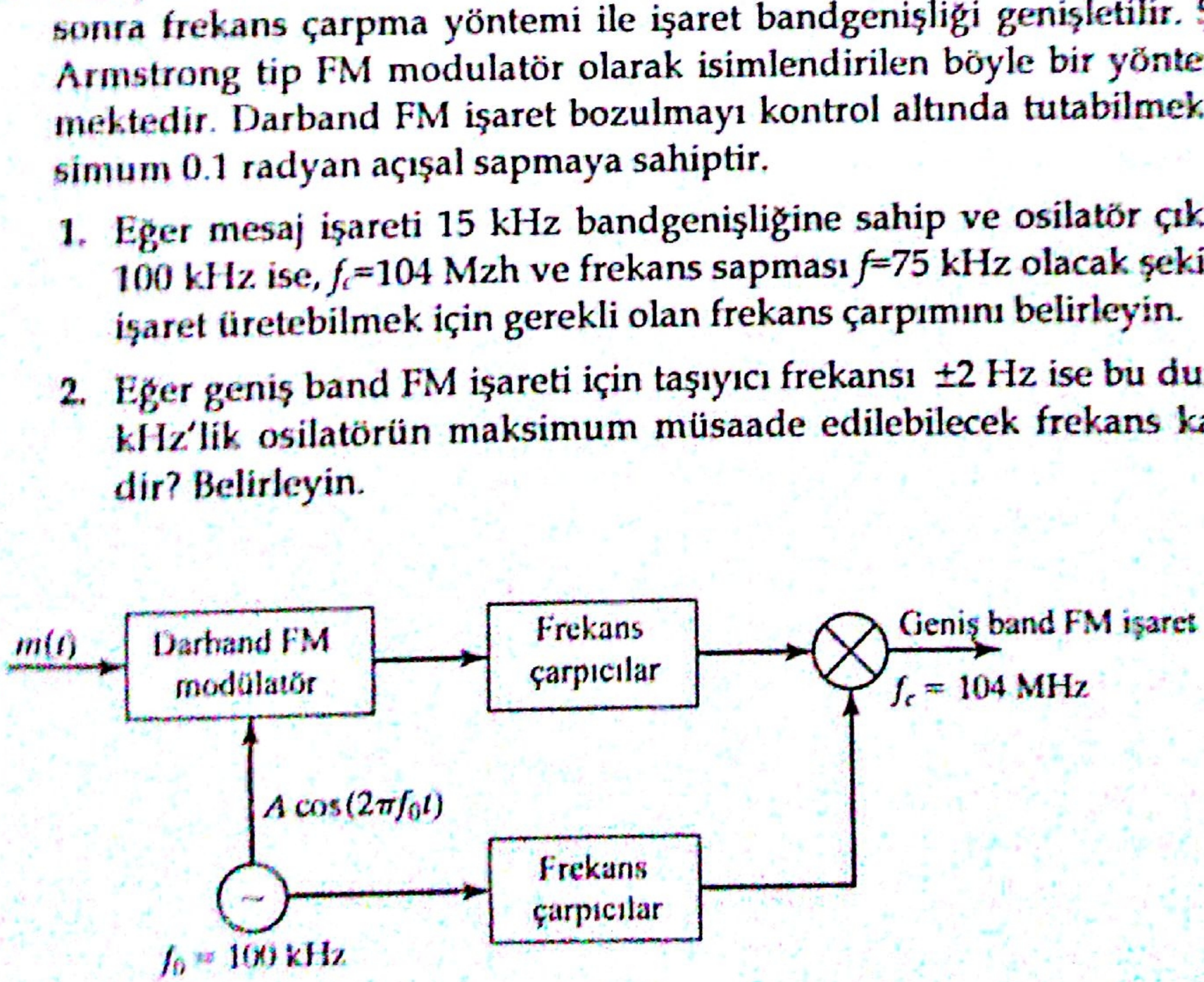
Formuna sahiptir. Burada f_c=10 MHz'dir.

1. Ortalama iletilen gücü belirleyin.
2. Tepe-faz kaymasını belirleyin.
3. Tepe-frekans kaymasını belirleyin.
4. Bu bir FM mi yoksa FzM işaret mi? Neden

4.5 Bir FM sistemde tüm modüle edilmiş işaret gücünü yanbandlarda içerecek ve taşıyıcı frekansta hiçbir güç iletimi olmayacak şekilde mümkün olan en küçük modülasyon indeksini belirleyin.

4.6 Geniş band FM üretmek için, ilk olarak darband bir FM işaret üretilir ve daha sonra frekans çarpma yöntemi ile işaret bandgenişliği genişletilir. Şekil P-4.6 Armstrong tip FM modulatör olarak isimlendirilen böyle bir yöntemi göstermektedir. Darband FM işaret bozulmayı kontrol altında tutabilmek için maksimum 0.1 radyan açışal sapmaya sahiptir.

1. Eğer mesaj işareti 15 kHz bandgenişliğine sahip ve osilatör çıkış frekansı 100 kHz ise, f_c=104 Mzh ve frekans sapması f=75 kHz olacak şekilde bir FM işaret üretebilmek için gerekli olan frekans çarpımını belirleyin.
2. Eğer geniş band FM işareti için taşıyıcı frekansı ±2 Hz ise bu durumda 100 kHz'lik osilatörün maksimum müsaade edilebilecek frekans kayması nedir? Belirleyin.



Şekil P-4.6 Armstrong tipi FM modülatör

4.7

$$m(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{1}{4} \\ -1, & \frac{1}{4} \le t \le 1 \end{cases} \tag{4.6.1}$$

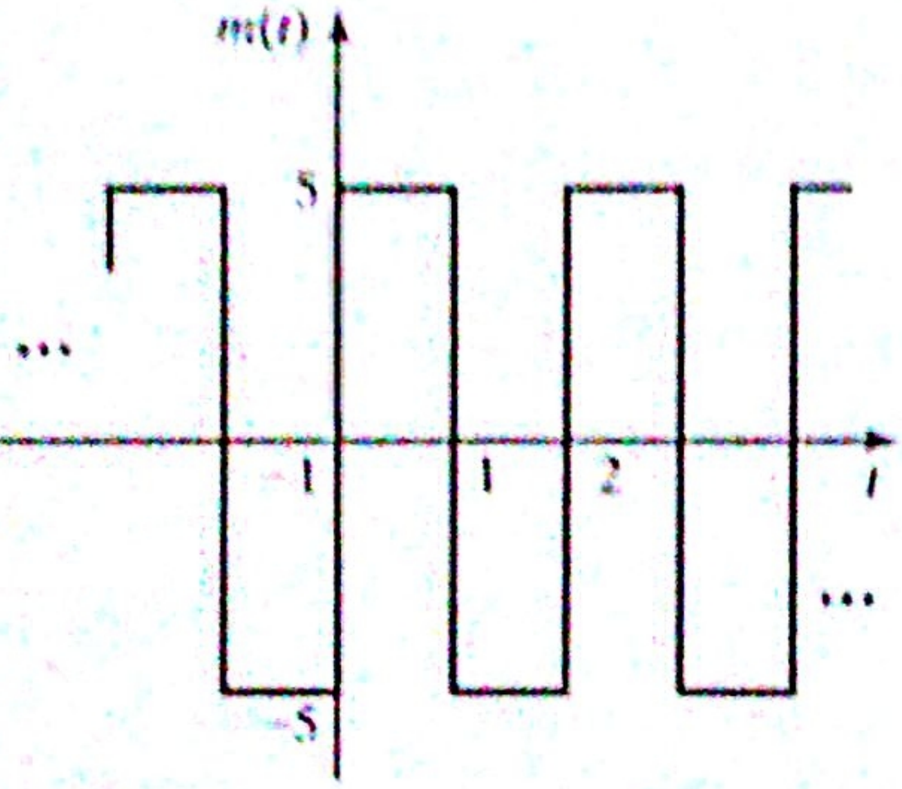
Şeklinde verilen bir periyodik $m(t)$ mesaj işareti için $k_p = 1$ olan bir FzM işaretinin frekans bileşenlerinin genlik ve fazını belirleyin.

4.8 Bir FM işaret

$$u(t) = 100\cos\left[2\pi f_c t + 100\int_{-\infty}^{t} m(\tau)\,d\tau\right],$$

şeklinde verilmiştir. Burada $m(t)$ Şekil P-4.8'de verilmiştir.

1. Ani frekansı zamanın bir fonksiyonu olarak çiziniz.
2. Tepe frekans kaymasını belirleyiniz.



Şekil P-4.8

4.9 $c(t) = 100\cos 2\pi f_c t$ taşıyıcı işareti $m(t) = 5\cos 20{,}000\pi t$ işareti ile frekans modülasyonuna tabi tutulmaktadır. Burada $f_c = 10^8$ Hz'dir. Tepe frekans kayması 20 kHz'dir.

1. Modüle edilmemiş taşıyıcı bileşenin gücünün % 10'undan daha fazla güce sahip olan tüm işaret bileşenlerinin genlik ve frekanslarını belirleyin.
2. Carson kuralından hareket ile FM işaretinin yaklaşık bandgenişliğini belirleyin.

4.10 $c(t) = A\cos 2\pi 10^6 t$ taşıyıcısı $m(t) = 2\cos 2000\pi t$ sinizoidal işareti tarafından açı (FM veya FzM) modülasyonuna tabi tutulmaktadır. Sapma sabiti $k_p = 1.5$ rad/v ve $k_f = 3000$ Hz/v dir.

1. β_f ve β_p belirleyin.
2. Herbir durumda Carson kuralını kullanarak bandgenişliğini belirleyin.

3. Modüle edilmiş işaretinin spektrumunu her iki durum içinde çizin. (Sadece yukarıda 2. Maddede belirlenmiş bandgenişliği içerisindeki frekans bileşenlerini çiziniz).
4. Eğer $m(t)$ genliği iki kat zayıflatılır ise 1-3 için verdiğiniz cevaplar nasıl değişir?
5. Eğer $m(t)$ genliği iki kat kuvvetlendirilir ise 1-3 için verdiğiniz cevaplar nasıl değişir?

4.11 $c(t) = 100\cos 2\pi f_c t$ taşıyıcı $m(t) = 5\cos 2000\pi t$ işareti tarafından faz modülasyonuna tabi tutuluyor. FzM işaret $\pi/2$ tepe faz kaymasına sahiptir. Taşıyıcı frekansı $f_c = 10^8$ Hz'dir.

1. Sinuzoidal bileşenlerin genlik spektrumunu belirleyin ve sonucu çizin
2. Carson Kuralını kullanarak FzM işaretin yaklaşık bandgenişliğini belirleyin ve 1. Sorudaki analitik çözüm ile kıyaslayın.

4.12 Bir açı modülasyonlu işaret

$$u(t) = 100\cos\left[2\pi f_c t + 4\sin 2\pi f_m t\right],$$

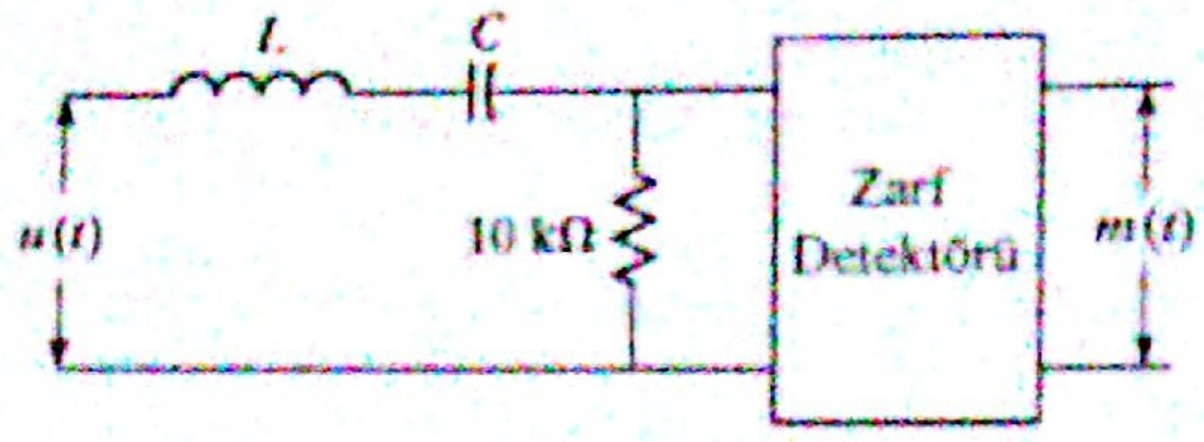
formuna sahiptir. Burada $f_c = 10$ MHz ve $f_m = 1000$ Hz

1. Bunun bir FM işaret olduğunu varsayarak modülasyon indeksini ve iletilen işaretin bandgenişliğini belirleyin.
2. f_m iki katına çıkar ise 1. Soruyu cevaplayın.
3. Bunun bir FzM işaret olduğunu varsayarak modülasyon indeksini ve iletilen işaretin bandgenişliğini belirleyin.
4. f_m iki katına çıkar ise 3. Soruyu cevaplayın.

4.13 Genlik modülasyonunun superpozisyon kuralına uyduğunu ancak açı modülasyonunun uymadığını göstermek kolaydır. Daha spesifik olarak, $m_1(t)$ ve $m_2(t)$ iki mesaj işaretini göstersin ve $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ ise ilgili modüle edilmiş işaretler olsun.

1. Birleştirilmiş işaret $m_1(t) + m_2(t)$ $A_c\cos 2\pi f_c t$ taşıyıcısını ÇYB olarak modüle ettiğinde sonucun ÇYB genlik modülasyonu yapılmış işaretlerinin toplamı $u_1(t) + u_2(t)$ olduğunu gösterin.
2. Eğer $m_1(t) + m_2(t)$ taşıyıcıyı FM olarak modüle eder ise, modüle edilmiş işaret $u_1(t) + u_2(t)$'e eşit olmadığını gösterin.

4.14 Bir FM ayırıcı Şekil P-4.14'de gösterilmektedir. Zarf detektörün ideal ve sonsuz giriş direnci olduğu varsayılıyor. Ayırıcı taşıyıcısı $f_c = 80$ MHz ve tepe frekans kayması 6 MHz olan bir FM işareti demodüle etmek için kullanılacak ise L ve C değerlerini seçiniz.



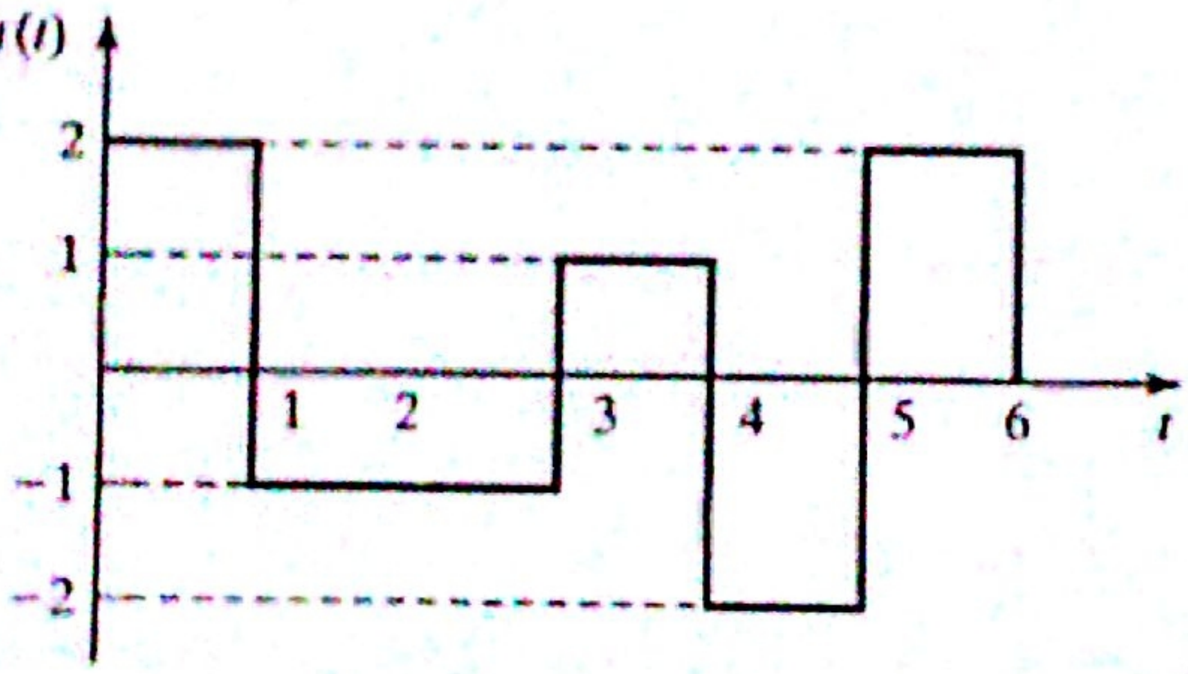
Şekil P-4.14

4.15 Açı modüleli bir işaret

$$u(t) = 100\cos[2000\pi t + \phi(t)],$$

olarak verilmiştir. Burada (a) $\phi(t) = 5\sin 20\pi t$ ve (b) $\phi(t) = 5\cos 20\pi t$ olacaktır. Hem (a) ve hem de (b) için genlik ve faz spektrumlarını belirleyin ve çizin ve sonuçları karşılaştırın.

4.16 Tepe frekans kayması f_d = 25 Hz/v olan bir FM modülatöre Şekil P-4.16'da gösterilen $m(t)$ mesaj işareti verilmiştir. Frekans sapmasını Hz olarak ve faz kaymasını radyan olarak çiziniz.



Şekil P-4.16

4.17 $m(t)$ mesaj işareti 10 kHz bandgenişliğine ve 1 volt tepe genlik $|m(t)|$ değerine sahiptir. $m(t)$ işareti tepe frekans kayması (a) f_d = 10 Hz/v (b) 100 Hz/v (c) 1000 Hz/v olacak şekilde bir taşıyıcıyı FM olarak modüle eder ise oluşan $u(t)$ işaretinin bandgenişliğini tahmin edin.

4.18 Bir FM modülatörünün girişindeki modüle edici işaret

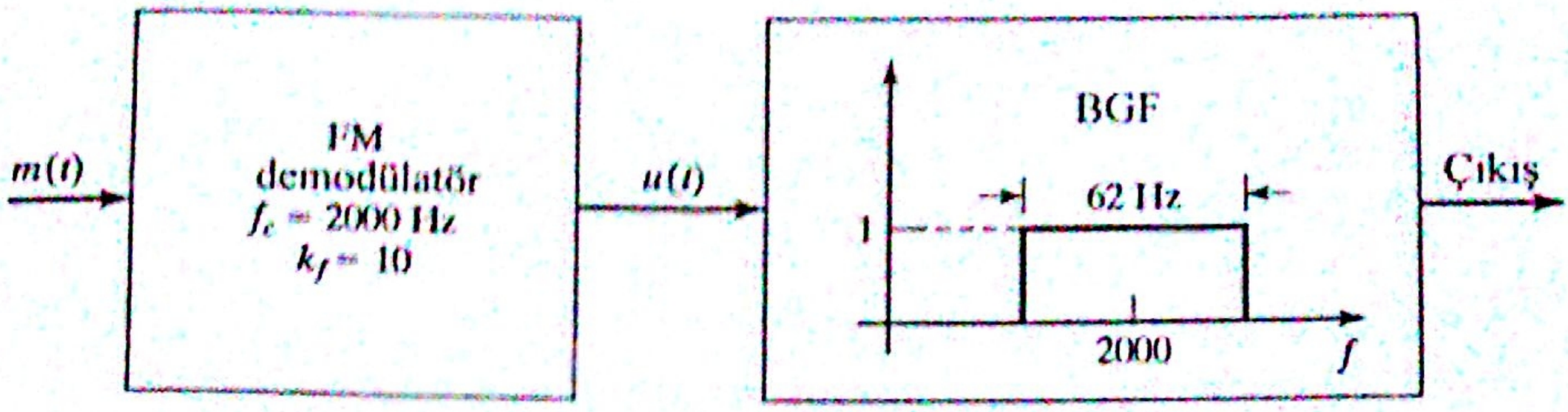
$$m(t) = 10\cos 16\pi t.$$

ise FM modülatörün çıkışı

$$u(t) = 10\cos\left[400\pi t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\,d\tau\right],$$

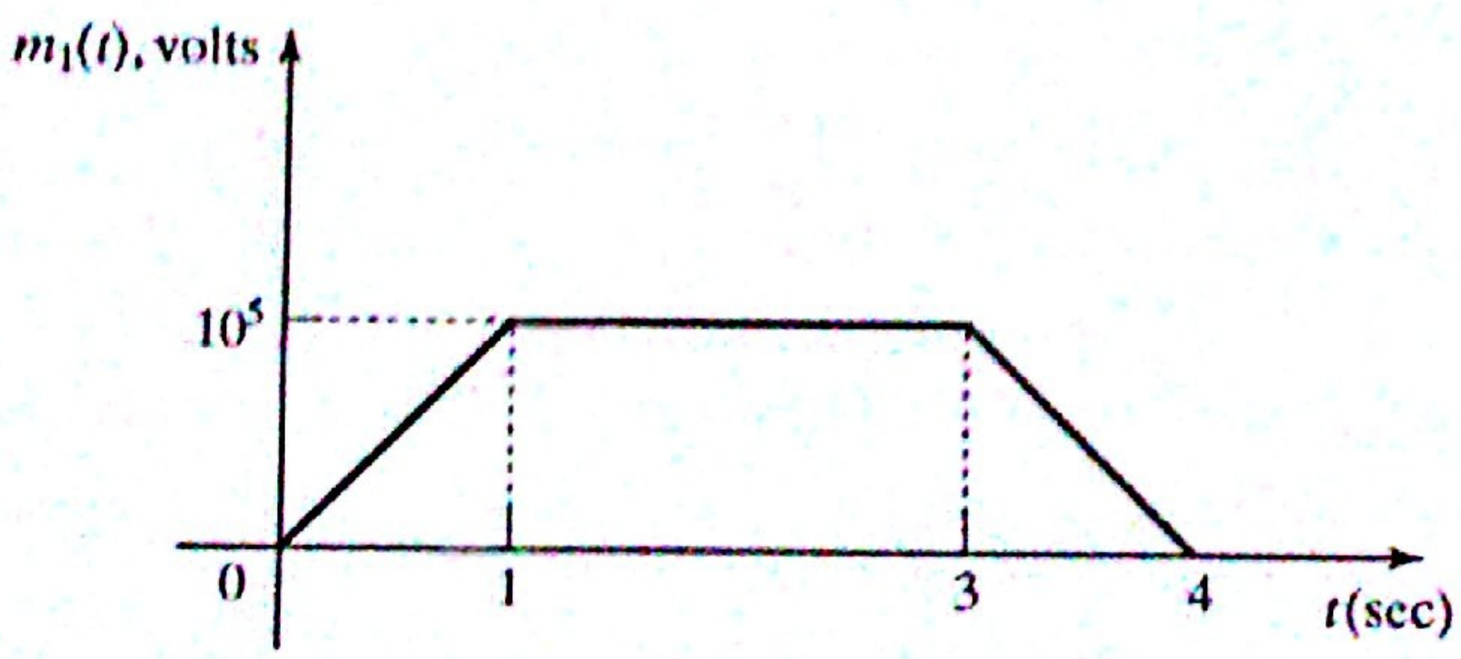
olmaktadır. Burada k_f= 10. (Şekil P-4.18'e bakın) Eğer modülatörün çıkısı merkez frekansı f_c=200 ve band genişlği 62 Hz olan bir ideal BGF'den geçirilir ise süzgeç çıkışındaki frekans

bileşenlerinin gücünü belirleyin. BGF çıkışında iletilen güç yüzdesi nedir?



Şekil P-4.18

4.19 Mesaj işareti $m_1(t)$ Şekil P-4.19 da gösterilmektedir ve $m_2(t)$ mesaj işareti $m_2(t) = \text{sinc}(2 \times 10^4 t)$ volt'tur.



Şekil P-4.19

1. $m_1(t)$ frekansı 10^6 Hz olan bir taşıyıcı ve frekans sapma sabiti (k_f) 5 Hz/v olacak şekilde frekans modülasyonuna tabi tutar ise modüle edilmiş işaretin maksimum ani frekansı ne olur?
2. $m_1(t)$ taşıyıcıyı faz sapma sabiti $k_p = 3$ rad/v olacak şekilde faz modülasyonuna tabi tutar ise modüle edilmiş işaretin maksimum ani frekansı ne olur? Modüle edilmiş işaretin minimum ani frekansı ne olur?
3. $m_1(t)$ taşıyıcıyı frekans sapma sabiti $k_f = 10^3$ Hz/v olacak şekilde frekans modülasyonuna tabi tutar ise modüle edilmiş işaretin maksimum ani frekansı ne olur? Modüle edilmiş işaretin bandgenişliği ne olur?

4.20 Superheteredin FM alıcı 88-108 MHz frekans aralığında çalışmaktadır. IF ve lokal osilatör frekansları $f_{//} < f_{LO}$ olacak şekilde seçilmiştir. f_c' gölge frekansının 88-108 MHz bölgesinin dışında oluşmasını istiyoruz. Bu durumda gerekli olan en küçük $f_{//}$ değerini ve f_{LO}'daki değişim aralığını belirleyin.

BİLGİSAYAR PROBLEMLERİ

4.1 Frekans Modülasyonu

Mesaj işareti

$$m(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < t_0/3 \\ -2 & t_0/3 \le t < 2t/3 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$c(t) = \cos 2\pi f_c t$ taşıyıcısını frekans modülasyonuna tabi tutacaktır. Burada $f_c = 200$ Hz ve $t_0 = 0.15$ msn'dir. Frekans kayma sabiti $k_f = 50$'dir. Dolayısı ile modüle edilmiş işaret

$$u(t) = \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\, d\tau\right)$$

şeklindedir.

1. $m(t)$ işaretini ve entegralini iki ayrı grafikte çiziniz. Örnekleme aralığını $t_s = 0.0001$ olsun.
2. FM işareti $u(t)$'i çiziniz.
3. $m(t)$ ve $u(t)$ işaretlerinin spektrumlarını hesaplamak için MATLAB'ın Fourier dönüşümü kullanın ve iki ayrı grafikte çizin.
4. $m(t)$ işaretinin bandgenişliği W spektrumda ana lobun genişliği olarak tanımlanmış olsun. Modülasyon indeksi β'yı belirleyin ve Carson kuralını kullanarak modüle edilmiş işaretin B_t bandgenişliğini belirleyin.

4.2 Frekans Modülasyonu

Mesaj işareti

$$m(t) = \begin{cases} \text{sinc}(100t) & |t| \le t_0 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$c(t) = \cos 2\pi f_c t$ taşıyıcısını frekans modülasyonuna tabi tutacaktır. Burada $f_c = 250$ Hz ve $t_0 = 0.1$ msn'dir. Frekans kayma sabiti $k_f = 100$'dir. Dolayısı ile modüle edilmiş işaret

$$u(t) = \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\, d\tau\right)$$

şeklindedir.

1. $m(t)$ işaretini ve entegralini iki ayrı grafikte çiziniz. Örnekleme aralığını $t_s = 0.0001$ olsun.
2. FM işareti $u(t)$'i çiziniz.
3. $m(t)$ ve $u(t)$ işaretlerinin spektrumlarını hesaplamak için MATLAB'ın Fourier dönüşümü kullanın ve iki ayrı grafikte çizin.

4. FM işaretini $u(t)$ orijinal mesaj işaretini yeniden elde etmek için demodüle edin ve elde edilen sonucu orijinal mesaj işareti ile karşılaştırın. FM işaret ilk olarak $u(t)$'in fazının bulunması, yani türevi alınıp $2\pi k_f$ ile bölündüğünde $m(t)$ işaretini üretebilecek olan $m(t)$'in entegralinin bulunması ile demodüle edilebilir. 2π faz katlanmasını ortadan kaldırmak için MATLAB'ın unwarp.m fonksiyonunu kullanın. Demodüle edilmiş işaret ile orijinal mesaj işaretinin ne kadar örtüştüğü noktasında yorum yapınız.

4.3 Frekans Modülasyonu

Mesaj işareti

$$m(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ -t+2 & 1 \le t < 2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$c(t) = \cos 2f_c t$ taşıyıcısını frekans modülasyonuna tabi tutacaktır. Burada f_c=1000 Hz ve t_o=0.1 msn'dir. Frekans kayma sabiti k_f=25'dir.

1. $m(t)$ işaretini ve entegralini iki ayrı grafikte çiziniz. Örnekleme aralığın t_s= 0.0001 olsun.
2. FM işareti

$$u(t) = \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\, d\tau\right).$$

çiziniz.

3. $m(t)$ ve $u(t)$ işaretlerinin spektrumlarını hesaplamak için MATLAB'ın Fourier dönüşümü kullanın ve iki ayrı grafikte çizin.
4. $u(t)$ işaretinin modülasyon indeksi, bandgenişliği ve ani frekans aralığını belirleyin.
5. FM işaretini $u(t)$ orijinal mesaj işaretini yeniden elde etmek için demodüle edin ve elde edilen sonucu orijinal mesaj işareti ile karşılaştırın. FM işaret ilk olarak $u(t)$'in fazının bulunması, yani türevi alınıp $2\pi k_f$ ile bölündüğünde $m(t)$ işaretini üretebilecek olan $m(t)$'in entegralinin bulunması ile demodüle edilebilir. 2π faz katlanmasını ortadan kaldırmak için MATLAB'ın unwarp.m fonksiyonunu kullanın. Demodüle edilmiş işaret ile orijinal mesaj işaretinin ne kadar örtüştüğü noktasında yorum yapınız.